

UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE

Année 2003

N° d'ordre : 03MULH0715

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE

par

Arnaud HIRTZ

RÉSONANCES DANS DES ÉQUATIONS DE TYPE ACKERBERG ET O'MALLEY ET LIENS AVEC DES PHÉNOMÈNES CANARDS

Rapporteurs : MM. E. Benoit (Université de La Rochelle)
 R. Schäfke (Université de Strasbourg)

Soutenue le 17 juin 2003, devant la Commission d'Examen :

MM. R. Lutz (Président)
 T. Sari (Directeur)
 E. Benoir
 R. Schäfke

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui de près où de loin m'ont aidé dans la réalisation de cette thèse.

Tout d'abord Monsieur Tewfik Sari, Professeur à l'Université de Haute Alsace pour m'avoir assisté et conseillé tout au long de mes travaux.

Je remercie Monsieur Robert Lutz pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse et pour m'avoir offert le premier contact avec l'analyse non standard.

Je remercie Messieurs Eric Benoît et Reinhard Schäfke d'avoir accepté de rédiger un rapport sur cette thèse et pour leur participation au jury. Je remercie également Monsieur Eric Benoît pour son accueil à La Rochelle et ses précieux conseils.

Je remercie bien sûr mes parents pour m'avoir soutenu tant sur le plan moral que sur le plan financier tout au long de ces travaux.

Enfin, je voudrais remercier les thésards actuels et anciens du laboratoire mathématiques et applications pour leur bonne humeur, en particulier dans le cadre du Club T.

Contents

Introduction	5
1 Résonance de Ackerberg et O'Malley	8
I Equation $\varepsilon u'' \pm 2tu' + ku = 0$	10
2 Méthodes de résolution directe	11
2.1 La résonance de Ackerberg et O'Malley	11
2.1.1 Théorème	11
2.1.2 Démonstration	12
2.2 L'équation $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$	15
2.2.1 Théorème	15
2.2.2 Démonstration	17
3 Equations avec second membre	21
3.1 Existence et unicité de la solution	21
3.2 Comportement de la solution du problème aux limites	23
4 Méthode géométrique	26
4.1 Résonance de Ackerberg et O'Malley	26
4.1.1 L'équation de Riccati	26
4.1.2 Résultats de J.-L. Callot[6]	29
4.1.3 Résonance et canards	34
4.2 L'équation $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$	37
4.2.1 L'équation de Riccati	37
4.2.2 Canards de l'équation de Riccati	39
4.2.3 Résonance et canards	52
II Equation générale	55
5 La résonance de Ackerberg et O'Malley	57
6 L'équation $\varepsilon u'' + f(t, \varepsilon)u' + g(t, a)u = 0$	60
6.1 Etude de l'équation de Riccati	62
6.2 Résonance	68

Annexe 1 :Notations et définitions	74
Annexe 2 : La fonction hypergéométrique confluyente de Kummer	75
Annexe 3 : Tracés numériques de solutions	77
L'équation $\varepsilon u'' - 2tu' + ku = 0$	77
L'équation $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$	81
Bibliographie	88

Introduction

En étudiant les solutions de l'équation

$$\varepsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x - a = 0$$

lorsque ε tend vers 0, Eric Benoît, Jean Louis Callot et Francine et Marc Diener ont trouvé l'existence de cycles limites particuliers dans le plan de Lienard. Obtenir l'équation dans le plan de Lienard consiste à poser $u = \varepsilon x' + F(x)$ avec $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Ce qui amène à étudier le système

$$\begin{cases} \varepsilon x' = u - F(x) \\ u' = a - x \end{cases}$$

qui est de type lent-rapide, sa variété lente étant constituée de la cubique $u = F(x)$.

Pour des valeurs de a proches de 1 ils ont montré l'existence de cycles qui après avoir longé une partie attractive de la variété lente conformément au théorème de Tykhonov continuent à longer celle-ci une fois qu'elle est devenue répulsive. Ils ont appelé ces cycles des canards.

Plus généralement on appelle solution canard une solution d'un champ lent-rapide qui longe pendant un temps appréciable une partie attractive de la variété lente et qui continue pendant un temps appréciable à longer celle-ci alors qu'elle est devenue répulsive.

Dans sa thèse [6], Jean Louis Callot a montré le lien qu'il pouvait y avoir entre des solutions canards obtenues dans le cadre de l'équation de Hermite et la résonance de Ackerberg et O'Malley. La thèse de Callot n'a pas été publiée. Les résultats de Callot sont décrits par Benoît, sous une forme modifiée, adaptée au problème qu'il étudiait, dans un Appendice de son article [4]. Nous allons mettre en évidence ce lien entre canards et résonance dans un cas non relatif à la résonance de Ackerberg et O'Malley.

Après une brève présentation de la résonance de Ackerberg et O'Malley, nous allons nous intéresser dans une première partie à deux exemples. Le premier est l'équation donnée comme exemple par Wasow dans [23] pour la résonance de Ackerberg et O'Malley

$$\varepsilon u'' - 2tu' + ku = 0 \tag{1}$$

Nous allons également considérer l'équation

$$\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0 \tag{2}$$

qui présente également un phénomène de résonance mais qui ne relève pas de la théorie de Ackerberg et O'Malley. Dans les deux cas le comportement de la

INTRODUCTION

solution d'un problème aux limites de type $u(-1) = A$, $u(1) = B$ change selon que k est un entier naturel pair ou non. Dans le premier cas, si k n'est pas un entier naturel pair, la solution tend vers 0 sur $] -1, 1[$ quand ε tend vers 0, alors que si k est un entier naturel pair, elle tend vers une solution de l'équation réduite. Dans le second cas, c'est lorsque k n'est pas un entier naturel pair que la solution tend vers des solutions de l'équation réduite (pas nécessairement la même des deux côtés de $t = 0$) et lorsque k est un entier naturel pair elle tend généralement vers l'infini.

Ceci sera montré de deux façons différentes.

Dans un premier temps (théorèmes 2.1.1 et 2.2.1) par une méthode analytique consistant à résoudre explicitement les solutions à l'aide de la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer et à utiliser son développement asymptotique. Cette méthode de démonstration est proposée par O'Malley dans [20]. Il est toutefois à remarquer que le résultat annoncé par celui-ci dans le cas de l'équation (2) est inexact, car si en général lorsque k est un entier naturel pair la solution va bien tendre vers l'infini, pour certaines valeurs de conditions aux limites et de paramètre (k multiple de 4 et $A = B$ ou k non multiple de 4 et $A = -B$) la solution du problème aux limites se comporte comme dans le cas non résonnant.

Nous montrerons de plus que dans le cas de l'équation (1) les limites sont uniformes sur les compacts. Pour ce qui est des solutions de l'équation (2), lorsque k est positif, les solutions de l'équation réduite tendent vers l'infini en 0. Par contre, lorsque k est négatif, les solutions de l'équation réduite tendent vers 0 en 0 et la limite est alors uniforme.

Dans un second temps en utilisant une équation de Riccati obtenue à partir du changement de variable utilisé par Callot dans sa thèse. Après avoir rappelé les résultats de Callot concernant l'équation de Riccati obtenue à partir de (1) nous montrerons le phénomène de résonance en utilisant des arguments de parité. Ensuite nous utiliserons ce même plan pour le cas de l'équation (2), ce qui nous permettra de détailler l'étude de l'équation de Riccati. Nous montrerons ainsi (théorème 4.2.6) que lorsque le paramètre k est un entier naturel pair l'équation de Riccati présente un feuilletage à canards. Nous montrerons également (théorème 4.2.8) que lorsque la différence entre k et l'entier naturel pair le plus proche élevée à la puissance ε est appréciablement inférieure à 1 des canards subsistent dans un feuilletage mixte. Cette étude sera faite en utilisant l'analyse non standard.

Entre ces deux chapitres on trouvera quelques éléments concernant le problème de résonance pour une équation avec second membre du type

$$\varepsilon u'' + 2\delta t u' + ku = h(t, \varepsilon)$$

avec $\delta = \pm 1$. On y trouvera notamment une étude des solutions analytiques de l'équation réduite ainsi que des liens entre équation avec et sans second membre. Dans un premier temps (proposition 3.1.1) nous montrerons l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes aux limites. Ensuite, après avoir montré l'existence et l'unicité de la solution analytique de l'équation réduite lorsque δk n'est pas un entier négatif pair (proposition 3.2.1), nous donnerons

INTRODUCTION

le comportement des solutions de problèmes aux limites lorsque de plus k est négatif (théorèmes 3.2.5 et 3.2.6).

La seconde partie sera consacrée à l'étude des problèmes aux limites pour l'équation

$$\varepsilon u'' + f(t)u' + g(t, a)u = 0 \quad (3)$$

avec f une fonction ne s'annulant qu'en 0 et telle que $f'(0)$ est positif.

Après avoir remarqué que les résultats ne peuvent être obtenus directement à partir de ceux de Ackerberg et O'Malley pour $f'(0)$ négatif, nous ferons l'étude de la résonance selon le même plan que pour les exemples, c'est à dire étude de l'équation de Riccati en détaillant la méthode de Callot puis remontée au problème aux limites. L'étude de l'équation de Riccati se fera notamment à partir d'une loupe exponentielle qui permet d'utiliser localement les résultats obtenus dans le cadre des équations de la première partie. Pour la résonance lorsque $f'(0)$ est positif, la méthode utilisée par Callot pour la résonance de Ackerberg et O'Malley n'est pas utilisable. Celle-ci consiste en effet en une intégration des canards et est basée sur une certaine régularité des solutions près de 0. Toutefois dans notre cas les solutions présentent une couche en 0 qui ne permet pas de relier les solutions des deux côtés de 0. Nous montrerons que les solutions du problème aux limites vont longer des solutions de l'équation réduite dans le cas non résonnant (théorème 6.2.3) tandis que dans le cas résonnant elles sont infiniment grandes (théorème 6.2.3). Nous montrerons en particulier qu'une condition nécessaire de résonance est que

$$\circ \left(\frac{g(0, a)}{f'(0)} \right) \in \mathbb{N}$$

Dans une première annexe figurent quelques définitions et notations utilisées. Dans une seconde annexe figurent quelques propriétés utilisées de la fonction de Kummer. Enfin une troisième annexe présente quelques tracés de solutions de problèmes aux limites pour les équations (1) et (2) avec des valeurs de ε petites.

Chapter 1

Résonance de Ackerberg et O'Malley

Le phénomène de résonance de Ackerberg et O'Malley concerne des problèmes aux limites pour des équations linéaires du second ordre avec une perturbation singulière de la forme

$$\varepsilon u'' + f(t, \varepsilon)u' + g(t, \varepsilon)u = 0 \quad (1.1)$$

avec f et g deux fonctions analytiques.

Le problème consiste à chercher le comportement limite de la solution avec $y(-c)$ et $y(d)$ donnés non nuls lorsque ε tend vers 0 (c et d étant deux réels strictement positifs fixés).

Si f vérifie $f'(t, \varepsilon) < 0$ pour tout t de $[-c, d]$ et si $f(0, \varepsilon) = 0$, alors Ackerberg et O'Malley ont mis en évidence, notamment en utilisant des méthodes de matching, le phénomène suivant.

Lorsque $L = -\frac{g(0,0)}{f'(0,0)}$ n'est pas un entier naturel la solution du problème aux limites va tendre vers 0 sur $] -c, d[$ avec des couches limites en $-c$ et en d .

Par contre lorsque L est un entier naturel, la solution peut tendre vers une solution de l'équation réduite

$$f(t, 0)u' + g(t, 0)u = 0$$

et peut présenter des couches limites soit en $-c$, soit en d , soit des deux côtés. C'est ce que l'on appelle une solution résonnante. La condition L entier naturel n'est toutefois pas une condition suffisante de résonance.

Cette condition est toutefois suffisante parfois, et c'est notamment le cas pour l'équation donnée en exemple par Wasow dans [23]

$$\varepsilon u'' - 2tu' + ku = 0$$

que nous étudierons dans la première partie où il suffit que $L = k/2$ soit un entier naturel pour avoir résonance.

Dans le cas plus général, en supposant que $f'(t, 0) < 0$, Matkowsky[19] a proposé comme condition de résonance l'existence d'une solution formelle $\hat{u}(t, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} u_n(t) \varepsilon^n$ de (1.1) avec u_n analytique au voisinage de 0. C.H.

CHAPITRE 1 : RESONANCE DE ACKERBERG ET O'MALLEY

Lin [16] a montré que cette condition est suffisante pourvu que f et g soient analytiques dans un voisinage de $[-c, d] \times 0$ de $\mathbb{C}^2$. $f'(t, 0) < 0$

Dans le cas où la condition $f'(t, 0) < 0$ n'est pas vérifiée, c'est à dire si $t \mapsto f(t, 0)$ a un zero d'ordre supérieur à 1, A. Fruchard et R. Schäfke [12] ont montré que l'existence de solutions résonnantes est équivalente à la condition donnée par Matkowsky dans le cas où la fonction $t \mapsto g(t, 0)$ a un zero d'ordre au-moins p en 0, où p est l'ordre du zero de $t \mapsto f(t, 0)$ en 0.

Part I

Equation $\varepsilon u'' \pm 2tu' + ku = 0$

Chapter 2

Méthodes de résolution directe

2.1 La résonance de Ackergberg et O'Malley

Dans ce chapitre nous allons montrer comment retrouver le résultat de Ackergberg et O'Malley dans un cas simple en résolvant de manière explicite le problème aux limites à partir de la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer et en étudiant cette solution.

2.1.1 Théorème

Nous allons considérer l'équation linéaire du second ordre suivante:

$$\varepsilon u'' - 2tu' + ku = 0 \quad (2.1)$$

où ε est un paramètre réel strictement positif petit, destiné à tendre vers 0 et k est un paramètre réel fixé. Nous allons rechercher le comportement lorsque ε tend vers 0 de la solution de cette équation vérifiant le problème aux limites suivant:

$$u(-1, \varepsilon) = A, \quad u(1, \varepsilon) = B \quad (2.2)$$

Théorème 2.1.1 *Pour tout réel k il existe un réel ε_0 positif tel que pour toute valeur de A, B et pour tout ε positif inférieur à ε_0 il existe une unique solution de (2.1) vérifiant les conditions aux limites (2.2). Soit u cette unique solution. Alors:*

- (i) *Si k n'est pas un entier naturel pair, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = 0$ pour tout t de $] -1, 1[$ et la solution présente deux couches limites aux extrémités. De plus la limite est uniforme sur tout compact.*
- (ii) *Si k est un entier naturel pair, alors la limite de $u(t, \varepsilon)$ quand ε tend vers zero est proportionnelle à $t^{k/2}$ pour tout t de $] -1, 1[$. Plus précisément,*
 - Si k est un multiple de 4 alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2} t^{k/2}$ pour $t \in] -1, 1[$*
 - Si k est de la forme $2(n+1)$ alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{B-A}{2} t^{k/2}$ pour $t \in] -1, 1[$.*

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

De plus ces limites sont uniformes sur tout compact.

Ce théorème contient deux parties. La première est l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites. Elle sera obtenue par résolution directe de l'équation. Ensuite c'est au moyen du développement asymptotique de cette solution que nous montrerons que le comportement aux limites de cette solution est très différente pour certaines valeurs discrètes du paramètre k .

2.1.2 Démonstration

Dans un premier temps nous allons montrer l'existence unique de la solution du problème aux limites.

Proposition 2.1.2 *Soit k un réel fixé. Il existe un réel positif ε_0 tel que pour tous couples de réels A et B et pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ l'équation (2.1) admet une et une seule solution vérifiant les conditions aux limites (2.2).*

Preuve. Nous allons chercher des solutions de (2.1) sous la forme

$$u(t, \varepsilon) = U\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

On a alors

$$u'(t, \varepsilon) = \frac{2t}{\varepsilon} U'\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right) \text{ et } u''(t, \varepsilon) = \frac{4t^2}{\varepsilon^2} U''\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right) + \frac{2}{\varepsilon} U'\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

ce qui dans (2.1) donne

$$\frac{4t^2}{\varepsilon} U''\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right) + 2U'\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right) - \frac{4t^2}{\varepsilon} U'\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right) + kU\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0$$

Ce qui donne en posant $T = \frac{t^2}{\varepsilon}$:

$$TU'' + \left(\frac{1}{2} - T\right)U' + \frac{k}{4}U = 0 \tag{2.3}$$

Cette équation admet pour solutions $U_1(T) = M\left(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, T\right)$ et $U_2(X) = \sqrt{X}M\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}, \frac{3}{2}, T\right)$ où M est la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer. On trouvera en annexe la définition ainsi que les propriétés utilisées de cette fonction.

A partir des fonctions U_1 et U_2 en revenant aux variables d'origine nous obtenons deux solutions de (2.1) : $u_1(t, \varepsilon) = M\left(-\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right)$ et $u_2(t, \varepsilon) = tM\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right)$. Le changement de variables $T = \frac{t^2}{\varepsilon}$ ne nous assure la validité de ces solutions que sur des intervalles ne contenant pas 0, mais on peut vérifier qu'elles restent valables sur tout $\mathbb{R}$. Pour vérifier que ces deux solutions forment un système libre il suffit de constater que u_1 est paire alors que u_2 est impaire. Nous pouvons donc chercher la solution du problème aux limites sous la forme $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ avec C_1 et C_2 deux constantes réelles. La remarque de parité précédente nous permet d'obtenir ces valeurs immédiatement. En effet, soit $g(t, \varepsilon) = \frac{u_1(t, \varepsilon)}{u_1(1, \varepsilon)}$ et soit $h(t, \varepsilon) = \frac{u_2(t, \varepsilon)}{u_2(1, \varepsilon)}$. Ces deux solutions sont définies pourvu que leurs dénominateurs soient non nuls, ce qui peut être assuré en prenant

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

ε assez petit pour être inférieur aux plus petits zéros de $\varepsilon \mapsto u_1(1, \varepsilon)$ et $\varepsilon \mapsto u_2(1, \varepsilon)$. Par linéarité de l'équation, g est une solution paire de (2.1) vérifiant $g(1, \varepsilon) = g(-1, \varepsilon) = 1$ et h est une solution impaire de (2.1) vérifiant $h(1, \varepsilon) = 1 = -h(-1, \varepsilon)$. On en déduit immédiatement que

$$u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2}g(t, \varepsilon) + \frac{B-A}{2}h(t, \varepsilon)$$

est solution de (2.1) et vérifie les conditions aux limites.

L'unicité de cette solution provient de la linéarité de l'équation. ■

Nous allons maintenant étudier le comportement limite de cette solution dans le cas non résonnant.

Proposition 2.1.3 *Soient k, A et B trois réels fixés. Soit $u(., \varepsilon)$ la solution de (2.1) vérifiant les conditions aux limites (2.2) pour une valeur de ε réel positif donné. Alors, si k n'est pas un entier naturel pair, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = 0 \ \forall t \in]-1, 1[$. De plus cette limite est uniforme sur tout compact.*

Preuve. Pour démontrer ceci nous allons utiliser le développement asymptotique de la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer. D'après (10) (voir annexe) on a pour t non nul,

$$M\left(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{-k}{4})} e^{\frac{t^2}{\varepsilon}} \left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{-k}{4}-\frac{1}{2}} (1 + O(\varepsilon)) \quad (2.4)$$

En utilisant g et h les deux solutions définies dans la preuve de la proposition précédente on a le résultat suivant :

Si $\frac{k}{4}$ n'est pas un entier naturel (pour que $\Gamma(\frac{-k}{4})$ soit bien défini), alors pour tout t non nul

$$g(t, \varepsilon) = e^{\frac{t^2-1}{\varepsilon}} (t^2)^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} (1 + O(\varepsilon))$$

Alors, si $0 < |t| < 1$, comme $t^2 - 1 < 0$, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t, \varepsilon) = 0$. Il reste le problème au voisinage de 0. Pour ceci nous allons à nouveau utiliser le développement asymptotique du dénominateur : de (2.4) on déduit que $M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\varepsilon})$ tend vers l'infini lorsque ε tend vers 0. Comme $M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, 0) = 1$ on en déduit que

$$g(0, \varepsilon) = \frac{M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, 0)}{M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\varepsilon})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

De même on a si t est non nul

$$M\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{k}{4})} e^{\frac{t^2}{\varepsilon}} \left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{-k}{4}-1} (1 + O(\varepsilon))$$

ce qui donne si $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ n'est pas un entier naturel

$$h(t, \varepsilon) = t e^{\frac{t^2-1}{\varepsilon}} (t^2)^{-\frac{k}{4}-1} (1 + O(\varepsilon))$$

et si $|t| < 1$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t, \varepsilon) = 0$ (ici le cas $t = 0$ ne pose pas problème car $h(0, \varepsilon)$ est nul pour tout ε).

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

Comme $u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2}g(t, \varepsilon) + \frac{B-A}{2}h(t, \varepsilon)$, on en déduit que si $\frac{k}{4}$ et $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ ne sont pas des entiers naturels, c'est à dire si k n'est pas un entier naturel pair, on a pour tout $t \in]-1, 1[$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = 0$.

Pour montrer l'uniformité de la limite nous allons utiliser l'analyse non standard. Le seul problème se présente au voisinage de 0 et nous devons montrer que pour tout ε infiniment petit et pour tout t infiniment petit les valeurs de $g(t, \varepsilon)$ et $h(t, \varepsilon)$ sont infiniment petites.

Soit ε infiniment petit.

La fonction $t \mapsto M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, t)$ est une fonction standard qui tend vers l'infini à l'infini. Donc si $\frac{t^2}{\varepsilon}$ est limité, $M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon})$ est limité alors que $M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\varepsilon})$ est infiniment grand. Donc $g(t, \varepsilon)$ est de la forme un limité divisé par un infiniment grand. On a donc $g(t, \varepsilon) \simeq 0$ si $\frac{t^2}{\varepsilon}$ est limité. Si $\frac{t^2}{\varepsilon}$ n'est pas limité, le développement asymptotique de M nous donne $g(t, \varepsilon) = e^{\frac{t^2-1}{\varepsilon}}(t^2)^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}(1 + \emptyset)$ qui est infiniment petit. Donc $g(t, \varepsilon)$ est infiniment petit pour tout t infiniment petit.

Par la même méthode on montre que $h(t, \varepsilon)$ est infiniment petit si t et ε le sont. ■

Il nous reste maintenant à étudier le comportement de la solution du problème aux limites lorsque ε tend vers zero pour les valeurs de k entier naturel pair. Pour ceci nous allons devoir utiliser le développement en série entière de la fonction de Kummer.

Nous pouvons maintenant montrer la proposition suivante, ce qui mettra également un terme à la démonstration du théorème 2.1.1.

Proposition 2.1.4 *Soient A et B réels fixés. Soit k un entier naturel pair. Soit $u(t, \varepsilon)$ la solution de (2.1) vérifiant les conditions aux limites (2.2).*

Si k est un multiple de 4 alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2}t^{k/2}$ pour $t \in]-1, 1[$.

Si k est de la forme $2(n+1)$ alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{B-A}{2}t^{k/2}$ pour $t \in]-1, 1[$.

De plus la limite est uniforme sur tout compact.

Preuve. Pour cette preuve nous allons distinguer deux cas, selon que k est un multiple de 4 ou pas.

• Supposons k multiple de 4 : $k = 4n_0$ avec n_0 entier naturel positif. Comme $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ n'est pas un entier naturel, les arguments pour montrer que h tend vers 0 tiennent toujours. On a donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t, \varepsilon) = 0$ si $|t| < 1$. Pour la fonction g par contre ceux-ci ne tiennent plus. Nous allons ici utiliser le développement en série de la fonction de Kummer. On a

$$M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}) = M(-n_0, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n_0)_n}{(\frac{1}{2})_n} \frac{t^{2n}}{n! \varepsilon^n}$$

Mais comme n_0 est un entier naturel positif, si $n > n_0$ on a

$$(-n_0)_n = (-n_0)(-n_0+1) \cdots (-n_0+n_0) \cdots (-n_0+n-1) = 0$$

On en déduit que

$$M(\frac{-k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{(\frac{1}{2})_n} \frac{t^{2n}}{n! \varepsilon^n}$$

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

On peut donc écrire $g(t, \varepsilon)$ sous la forme d'une fraction rationnelle en $1/\varepsilon$:

$$g(t, \varepsilon) = \frac{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{(\frac{1}{2})_n} \frac{t^{2n}}{n! \varepsilon^n}}{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{(\frac{1}{2})_n} \frac{1^{2n}}{n! \varepsilon^n}}$$

Pour passer à la limite il suffit alors de prendre les termes de plus haut degré, ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t, \varepsilon) = t^{2n_0} = t^{\frac{k}{2}}$$

Et comme $u = \frac{A+B}{2}g + \frac{B-A}{2}h$ on a si $|t| < 1$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2}t^{\frac{k}{2}}$.

Le problème de l'uniformité de la limite se pose en 0. Pour la fonction h nous avons déjà vu que la limite est uniforme. Pour ce qui est de la fonction g il faut remarquer que celle-ci peut être mise sous la forme d'un polynôme en t^2/ε , ce qui nous assure l'uniformité de la limite sur $[-1, 1]$.

• Supposons que k est un entier naturel pair non multiple de 4: $k = 4n_0 + 2$. Comme dans la proposition précédente on a si $|t| < 1$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t, \varepsilon) = 0$.

$$M\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right) = M\left(-n_0, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(n_0)_n}{(\frac{3}{2})_n} \frac{t^{2n}}{n! \varepsilon^n}$$

Comme g précédemment, c'est maintenant h qui s'écrit sous la forme de fraction rationnelle en $1/\varepsilon$:

$$h(t, \varepsilon) = t \frac{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{(\frac{3}{2})_n} \frac{t^{2n}}{n! \varepsilon^n}}{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{(\frac{3}{2})_n} \frac{1^{2n}}{n! \varepsilon^n}}$$

et en prenant les termes de plus haut degré on obtient:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t, \varepsilon) = t \cdot t^{2n_0} = t^{2n_0+1} = t^{\frac{k}{2}}$$

On obtient donc si $|t| < 1$: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{B-A}{2}t^{\frac{k}{2}}$.

L'uniformité de la limite pour g dans ce cas a déjà été montrée. La fonction h peut se mettre sous la forme t fois un polynôme en t^2/ε , ce qui donne l'uniformité sur tout compact de $] -1, 1[$. ■

2.2 L'équation $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$

2.2.1 Théorème

Dans cette section nous allons étudier l'équation linéaire du second ordre

$$\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0 \tag{2.5}$$

avec k un paramètre réel fixé et ε un paramètre réel positif.

Comme précédemment nous allons nous intéresser au comportement quand ε tend vers 0 de la solution du problème aux limites

$$u(-1, \varepsilon) = A, \quad u(1, \varepsilon) = B \tag{2.6}$$

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

où A et B sont deux réels.

Nous pouvons tout d'abord remarquer que ce problème n'est pas identique à celui du type précédent. En effet, si le changement d'inconnue

$$y = u \exp \frac{t^2}{\varepsilon}$$

transforme l'équation en

$$\varepsilon y'' - 2ty' + ky = 0$$

le problème aux limites lui devient

$$y(-1, \varepsilon) = A \exp \frac{1}{\varepsilon}, y(1, \varepsilon) = B \exp \frac{1}{\varepsilon}$$

et les valeurs en 1 et -1 tendent vers l'infini.

Nous allons voir que cette équation qui ne relève pas du phénomène de résonance de Ackerberg et O'Malley présente elle aussi une forme de résonance.

Théorème 2.2.1 *Pour toute valeur de k il existe ε_0 tel que pour tous A et B et pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une unique solution de (2.5) vérifiant les conditions aux limites (2.6). Soit u cette unique solution. Alors:*

· Si k n'est pas un entier naturel pair non nul,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2} |t|^{-\frac{k}{2}} + \frac{B-A}{2} t |t|^{-\frac{k}{2}-1} \quad \forall t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

et la solution ne présente pas de couches limites aux extrémités mais une couche libre en 0. De plus si k est négatif, la limite ci-dessus est également vraie en 0 et la convergence est uniforme sur les compacts.

· Si k est un entier naturel pair non nul et $A^2 + B^2 \neq 0$, alors la limite de $u(t, \varepsilon)$ quand ε tend vers zero est infinie pour tout t de $] -1, 1[\setminus \{0\}$ sauf si k est un multiple de 4 et $A = B$ auquel cas elle vaut $A |t|^{-\frac{k}{2}}$ et si k n'est pas un multiple de 4 et $B = -A$ où elle vaut $Bt |t|^{-\frac{k}{2}-1}$.

Nous voyons ici que comme dans le cas de Ackerberg et O'Malley le comportement limite de la solution est très différent selon que k est un entier naturel pair ou pas.

Une autre formulation de ce théorème peut être obtenue à partir de solutions de l'équation réduite

$$2tu' + ku = 0 \tag{2.7}$$

Soit u_L la solution de l'équation réduite (2.7) définie pour t strictement négatif et vérifiant la condition à gauche : $u_L(-1) = A$. On a pour tout t strictement négatif

$$u_L(t) = -At^{-\frac{k}{2}}$$

Soit u_R la solution de l'équation réduite (2.7) définie pour t strictement positif et vérifiant la condition à droite : $u_R(1) = B$. On a pour tout t strictement positif

$$u_R(t) = Bt^{-\frac{k}{2}}$$

Le théorème précédent nous dit que lorsque k n'est pas un entier naturel pair non nul la limite pour les t strictement négatif vaut $u_L(t)$ et pour les t strictement positifs $u_R(t)$. De même si k est un multiple de 4 et $A = B$ ou si k n'est pas un multiple de 4 et $B = -A$, la limite pour les t strictement négatifs vaut $u_L(t)$ et pour les t strictement positifs $u_R(t)$.

2.2.2 Démonstration

Pour faire la démonstration de ce théorème nous allons utiliser des méthodes analogues à celles utilisées dans le chapitre précédent et décomposer la démonstration en trois parties : existence et unicité, cas non résonnants, cas résonnants.

Proposition 2.2.2 *Soit k un réel fixé. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tous A et B et pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ l'équation (2.5) admet une et une seule solution vérifiant les conditions aux limites (2.6).*

Preuve. Nous allons chercher les solutions de (2.5) sous la forme

$$u(t, \varepsilon) = U\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

L'équation devient alors

$$\frac{4t^2}{\varepsilon} U''\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) - 2U'\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) - \frac{4t^2}{\varepsilon} U'\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) + kU\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0$$

Ce qui en posant $X = -\frac{t^2}{\varepsilon}$ donne

$$XU'' + \left(\frac{1}{2} - X\right)U' - \frac{k}{4}U = 0$$

dont deux solutions sont

$$U_1(X) = M\left(\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, X\right)$$

et

$$U_2(X) = \sqrt{X}M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, X\right)$$

En revenant aux variables originales nous obtenons deux solutions de (2.5) qui sont

$$u_1(t, \varepsilon) = M\left(\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

et

$$u_2(t, \varepsilon) = tM\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

En remarquant que u_1 est paire et u_2 impaire on en déduit l'indépendance de ces deux solutions et la solution du problème aux limites

$$u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2}g_s(t, \varepsilon) + \frac{B-A}{2}h_s(t, \varepsilon)$$

avec $g_s(t, \varepsilon) = \frac{u_1(t, \varepsilon)}{u_1(1, \varepsilon)}$ et $h_s(t, \varepsilon) = \frac{u_2(t, \varepsilon)}{u_2(1, \varepsilon)}$ (qui sont définies pour ε assez petit).

L'unicité de cette solution provenant de la linéarité de l'équation (2.5). ■

Nous allons maintenant nous intéresser au cas non résonnant.

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

Proposition 2.2.3 *Soient k , A et B trois réels fixés. Soit $u(., \varepsilon)$ la solution de (2.5) vérifiant les conditions aux limites (2.6) pour une valeur de ε réel positif donné. Alors, si k n'est pas un entier naturel pair non nul, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{A+B}{2} |t|^{-\frac{k}{2}} + \frac{B-A}{2} t |t|^{-\frac{k}{2}-1} \quad \forall t \in]-1, 1[\setminus \{0\}$$

De plus si k est négatif, la limite ci-dessus est également vraie en 0 et la convergence est uniforme sur les compacts.

Preuve. Pour cette preuve nous allons utiliser le développement asymptotique de la fonction hypergéométrique de Kummer. D'après (11) on obtient pour t non nul

$$M\left(\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{k}{4})} \left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)^{-\frac{k}{4}} (1 + O(\varepsilon))$$

ce qui donne si $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ n'est pas un entier naturel

$$g_s(t, \varepsilon) = \frac{\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)^{-\frac{k}{4}}}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{k}{4}}} (1 + O(\varepsilon)) = |t|^{-\frac{k}{2}} (1 + O(\varepsilon))$$

Donc si $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ n'est pas un entier naturel on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_s(t, \varepsilon) = |t|^{-\frac{k}{2}}$$

De même

$$M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1 - \frac{k}{4})} \left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)^{-\frac{k}{4} - \frac{1}{2}} (1 + O(\varepsilon))$$

ce qui donne si $(\frac{k}{4} - 1)$ n'est pas un entier naturel

$$h_s(t, \varepsilon) = t |t|^{-1 - \frac{k}{2}} (1 + O(\varepsilon))$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_s(t, \varepsilon) = t |t|^{-1 - \frac{k}{2}}$$

Finalement si $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ et $(\frac{k}{4} - 1)$ ne sont pas des entiers naturels, c'est à dire si k n'est pas un entier naturel pair non nul on a le résultat indiqué.

Comme dans le cas de l'équation de type Ackermann et O'Malley, nous allons utiliser l'analyse non standard pour montrer l'uniformité de la limite.

Lorsque k est négatif, la fonction $t \mapsto M(\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, t)$ est une fonction standard qui tend vers l'infini en moins l'infini. Donc si ε est infiniment petit et $\frac{t^2}{\varepsilon}$ est limité, $g_s(t, \varepsilon)$ est de la forme limité divisé par infiniment grand et est donc infiniment petit, alors que si ε est infiniment petit et $\frac{t^2}{\varepsilon}$ n'est pas limité, on a $|t|^{-\frac{k}{2}} (1 + \emptyset)$ qui est infiniment petit. Nous avons donc bien $g_s(t, \varepsilon) \simeq 0$ si ε et t sont infiniment petits.

De même on montre que $h_s(t, \varepsilon)$ est infiniment petit lorsque t et ε le sont.

■

Il nous reste à étudier le cas résonnant, ce qui sera fait en utilisant la transformation de Kummer (12).

Proposition 2.2.4 Soient A et B réels fixés, $A^2 + B^2 \neq 0$. Soit k un entier naturel pair non nul. Soit $u(t, \varepsilon)$ la solution de (2.5) vérifiant les conditions aux limites (2.6). Alors la limite de $u(t, \varepsilon)$ quand ε tend vers 0 est infinie pour tout t non nul de $] -1, 1[$, sauf si k est un multiple de 4 et $A = B$ auquel cas elle vaut $A|t|^{-\frac{k}{2}}$ et si k n'est pas un multiple de 4 et $A = -B$ où elle vaut $Bt|t|^{-\frac{k}{2}}$.

Preuve. Nous allons distinguer les cas k multiple de 4 ou non.

· Si k est un multiple de 4 : $k = 4n_0$ avec n_0 entier naturel. Alors $(\frac{k}{4} - \frac{1}{2})$ n'est pas entier naturel et on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_s(t, \varepsilon) = |t|^{-\frac{k}{2}}$.

En utilisant la transformation de Kummer on a

$$M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = M\left(\frac{1}{2} + n_0, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} M\left(-n_0 + 1, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

Le développement de la fonction hypergéométrique confluyente en série donne alors

$$M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{(-n_0+1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{(t^2)^n}{\varepsilon^n n!}$$

Ce qui mène à

$$h_s(t, \varepsilon) = te^{\frac{1-t^2}{\varepsilon}} \frac{\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{(-n_0+1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{(t^2)^n}{\varepsilon^n n!}}{\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{(-n_0+1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{1}{\varepsilon^n n!}}$$

La partie rationnelle tend vers $t(t^2)^{n_0-1}$ alors que l'exponentielle tend vers $+\infty$ pour tout $t \in] -1, 1[$. On en déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_s(t, \varepsilon) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -\infty & \text{si } t \in] -1, 0[\end{cases}$$

Comme g_s a une limite finie pour tout t non nul et infinie en $t = 0$ on en déduit que la limite de u est infinie pour tout t de $] -1, 1[$ sauf si le coefficient de h_s est nul, c'est à dire si $A = B$. Dans ce dernier cas, la limite sera égale à $A|t|^{-\frac{k}{2}}$.

· Si k n'est pas un multiple de 4 : $k = 4n_0 + 2$. Alors $(\frac{k}{4} - 1)$ n'est pas un entier naturel et on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_s(t, \varepsilon) = t|t|^{-1-\frac{k}{2}}$.

La transformation de Kummer donne

$$M\left(\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} M\left(-n_0, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{\varepsilon}\right)$$

Après développement en série nous obtenons

$$g_s(t, \varepsilon) = e^{\frac{1-t^2}{\varepsilon}} \frac{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \frac{(t^2)^n}{\varepsilon^n n!}}{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-n_0)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \frac{1}{\varepsilon^n n!}}$$

D'où l'on déduit que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_s(t, \varepsilon) = +\infty$ pour tout t de $] -1, 1[$. Comme dans le cas précédent on en déduit que sauf si le coefficient de g_s est nul (c'est à dire si $B = -A$), la limite de u est infinie. ■

CHAPITRE 2 : METHODES DE RESOLUTION DIRECTE

Cette démonstration nous montre que le comportement de la limite est donné principalement par h_s lorsque k est un multiple de 4 et par celui de g_s lorsque k n'est pas un multiple de 4. Dans ce dernier cas par exemple g_s est de la forme une exponentielle qui tend vers $+\infty$ pour $t \neq \pm 1$ multipliée par un polynôme en t^2/ε . Le tracé de solutions dans ce cas pour des valeurs petites de ε montre de très fortes oscillations près de 0. Ces oscillations proviennent des changements de signes du polynôme en ses racines pour des valeurs fixées de t^2/ε , c'est à dire pour des t d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$.

Chapter 3

Equations avec second membre

Nous allons considérer l'équation

$$\varepsilon u'' + 2\delta t u' + ku = h(t, \varepsilon) \quad (3.1)$$

avec k un paramètre réel, ε un petit paramètre réel positif destiné à tendre vers 0, $\delta \in \{1, -1\}$ et h une fonction analytique.

Le but est de déterminer le comportement de la solution du problème aux limites

$$u(-1, \varepsilon) = A, u(1, \varepsilon) = B \quad (3.2)$$

lorsque le paramètre ε tend vers 0.

Dans un premier temps nous allons montrer que le problème aux limites admet une unique solution, ensuite nous allons étudier son comportement dans certains cas.

3.1 Existence et unicité de la solution

Proposition 3.1.1 *Pour toute valeur de k il existe ε_0 strictement positif tel que pour tout ε inférieur à ε_0 l'équation (3.1) admet une unique solution pour le problème aux limites (3.2).*

Preuve. Nous allons montrer cette proposition en construisant la solution avec la méthode de variation des constantes.

Dans une précédente partie nous avons vu que l'équation homogène associée à (3.1) admet $u_1 = M(\delta \frac{k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-\delta t^2}{\varepsilon})$ et $u_2 = tM(\frac{1}{2} + \delta \frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-\delta t^2}{\varepsilon})$ comme solutions.

Dans l'espace des phases, (3.1) s'écrit

$$\begin{cases} u' = v \\ \varepsilon v' + 2\delta t v + ku = h(t, \varepsilon) \end{cases} \quad (3.3)$$

et le système homogène associé à (3.3) admet $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}$ comme solutions. Soit W le wronskien de ce système de solutions. On a

$$W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)$$

CHAPITRE 3 : EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

Comme $u_2(0) = 0$, la valeur de $W(0)$ est égale à $u_1(0)u_2'(0)$. Or

$$u_1(t)u_2'(t) = M(\delta\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-\delta t^2}{\varepsilon}) \left[M(\frac{1}{2} + \delta\frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-\delta t^2}{\varepsilon}) - \delta\frac{t^2}{\varepsilon} \frac{2+\delta k}{6} M(\frac{3}{2} + \delta\frac{k}{4}, \frac{5}{2}, \frac{-\delta t^2}{\varepsilon}) \right]$$

ce qui nous donne $u_1(0)u_2'(0) = 1$. Donc $W(0) = 1$ est non nul et le système de solutions est libre.

Nous allons chercher la solution de (3.3) sous la forme

$$C_1(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \end{pmatrix} + C_2(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} C_1 u_1' + C_1' u_1 + C_2 u_2' + C_2' u_2 &= C_1 u_1' + C_2 u_2' \\ \varepsilon(C_1 u_1'' + C_1' u_1' + C_2 u_2'' + C_2' u_2') \\ + 2\delta t(C_1 u_1' + C_2 u_2') + k(C_1 u_1 + C_2 u_2) &= h \end{cases}$$

Après simplifications on obtient:

$$\begin{cases} C_1' u_1 + C_2' u_2 = 0 \\ C_1' u_1' + C_2' u_2' = \frac{h}{\varepsilon} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $u_1 u_2' - u_1' u_2$. Il s'agit du Wronskien de notre système et est donc non nul, ce qui permet d'obtenir:

$$\begin{cases} C_1' = \frac{-h u_2}{\varepsilon(u_1 u_2' - u_1' u_2)} \\ C_2' = \frac{h u_1}{\varepsilon(u_1 u_2' - u_1' u_2)} \end{cases}$$

qui donne par intégration:

$$\begin{cases} C_1(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{-h(\tau, \varepsilon) u_2(\tau)}{\varepsilon(u_1(\tau) u_2'(\tau) - u_1'(\tau) u_2(\tau))} d\tau + C_1 \\ C_2(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{h(\tau, \varepsilon) u_1(\tau)}{\varepsilon(u_1(\tau) u_2'(\tau) - u_1'(\tau) u_2(\tau))} d\tau + C_2 \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2 nous allons utiliser les conditions aux limites.

$$\begin{cases} u_1(-1, \varepsilon) C_1 + u_2(-1, \varepsilon) C_2 = A - u_1(-1, \varepsilon) \int_0^{-1} \frac{-h(\tau, \varepsilon) u_2(\tau)}{\varepsilon(u_1(\tau) u_2'(\tau) - u_1'(\tau) u_2(\tau))} d\tau \\ - u_2(-1, \varepsilon) \int_0^{-1} \frac{h(\tau, \varepsilon) u_1(\tau)}{\varepsilon(u_1(\tau) u_2'(\tau) - u_1'(\tau) u_2(\tau))} d\tau \\ u_1(1, \varepsilon) C_1 + u_2(1, \varepsilon) C_2 = B - u_1(1, \varepsilon) \int_0^1 \frac{-h(\tau, \varepsilon) u_2(\tau)}{\varepsilon(u_1(\tau) u_2'(\tau) - u_1'(\tau) u_2(\tau))} d\tau \\ - u_2(1, \varepsilon) \int_0^1 \frac{h(\tau, \varepsilon) u_1(\tau)}{\varepsilon(u_1(\tau) u_2'(\tau) - u_1'(\tau) u_2(\tau))} d\tau \end{cases}$$

Le problème aux limites admet donc une unique solution si et seulement si ce système est de Cramer, c'est-à-dire si $u_1(-1, \varepsilon)u_2(1, \varepsilon) - u_1(1, \varepsilon)u_2(-1, \varepsilon) \neq 0$, ce qui est le cas pour ε assez petit. En effet,

$$u_1(-1, \varepsilon)u_2(1, \varepsilon) - u_1(1, \varepsilon)u_2(-1, \varepsilon) = 2M(\delta\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-\delta}{\varepsilon})M(\frac{1}{2} + \delta\frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-\delta}{\varepsilon})$$

La fonction de Kummer s'annulant un nombre fini de fois, il existe $\varepsilon_0(k)$ tel que $\left| \frac{-\delta}{\varepsilon_0(k)} \right|$ est inférieur au plus petit zéro de $M(\delta\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, t)$ ainsi qu'à celui de $M(\frac{1}{2} + \delta\frac{k}{4}, \frac{3}{2}, t)$. Alors pour tout ε de $]0, \varepsilon_0(k)[$, $M(\delta\frac{k}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-\delta}{\varepsilon})$ et $M(\frac{1}{2} + \delta\frac{k}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-\delta}{\varepsilon})$ sont non nuls et le système est de Cramer.

Pour ε assez petit il y a donc existence et unicité de la solution du problème aux limites. ■

3.2 Comportement de la solution du problème aux limites

Dans un premier temps nous allons étudier l'équation réduite associée à (3.1), c'est à dire l'équation

$$2\delta tu' + ku = h(t, 0) \quad (3.4)$$

Proposition 3.2.1 *Si δk n'est pas un entier négatif pair ou nul, alors l'équation (3.4) admet une unique solution analytique.*

Preuve. Soit $h(t, 0) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ le développement en série de $h(., 0)$ autour de 0. On cherche les solutions de (3.4) de la forme $u(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$.

Le terme d'ordre 0 donne $u_0 = \frac{a_0}{k}$ et à l'ordre n on a

$$(2\delta n + k)u_n = a_n$$

Si δk n'est pas un entier négatif pair, $(2\delta n + k)$ est non nul pour toute valeur de n et on a $u_n = \frac{a_n}{2\delta n + k}$. L'équation (3.4) admet donc au plus une solution analytique. Il reste à vérifier que le rayon de convergence de celle-ci est non nul.

Soit R_1 le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ et R_2 celui de $\sum_{n \geq 0} u_n t^n$ (qui est éventuellement nul). On a

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |u_n|^{\frac{1}{n}}$$

Or pour n assez grand, $|u_n| \leq |a_n|$. On a donc

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R_1}$$

On en déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n t^n$ est au-moins égal à celui de $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$. ■

Remarque 3.2.2 *Si $\delta k = -2n_0$ avec n_0 entier naturel, deux cas peuvent se présenter:*

Si a_{n_0} est non nul, alors $(2\delta n_0 + k)u_{n_0} = a_{n_0}$ n'a pas de solution et (3.4) n'admet aucune solution analytique.

Si $a_{n_0} = 0$ alors toute valeur pour u_{n_0} convient et (3.4) a une infinité de solutions analytiques.

Proposition 3.2.3 *Si δk n'est pas un entier négatif pair ou nul, la résolution du problème aux limites peut se ramener à celle de conditions nulles aux bords avec un second membre infiniment petit.*

CHAPITRE 3 : EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

Preuve. Soit u_0 l'unique solution analytique de (3.4).

Soit $\tilde{u}$ la solution de l'équation homogène $\varepsilon u'' + 2\delta t u' + ku = 0$ vérifiant les conditions aux limites

$$\tilde{u}(-1, \varepsilon) = A - u_0(-1) \text{ et } \tilde{u}(1, \varepsilon) = B - u_0(1)$$

On pose alors $w = u - (u_0 + \tilde{u})$ où u est la solution du problème aux limites recherchée. Nous allons chercher l'équation vérifiée par w .

On a $\varepsilon w'' + 2\delta t w' + kw = \varepsilon u'' + 2\delta t u' + ku - \varepsilon u_0'' - 2\delta t u_0' - ku_0 - \varepsilon \tilde{u}'' - 2\delta t \tilde{u}' - k\tilde{u}$. Or par définition, $\varepsilon u'' + 2\delta t u' + ku = h(t, \varepsilon)$; $2\delta t u_0' + ku_0 = h(t, 0)$ et $\varepsilon \tilde{u}'' + 2\delta t \tilde{u}' + k\tilde{u} = 0$. Ce qui donne

$$\varepsilon w'' + 2\delta t w' + kw = h(t, \varepsilon) - h(t, 0) - \varepsilon u_0'' \quad (3.5)$$

Soit $H(t, \varepsilon) = h(t, \varepsilon) - h(t, 0) - \varepsilon u_0''$. La fonction H converge uniformément vers 0 sur $[-1; 1]$.

De plus w vérifie les conditions aux limites

$$w(-1, \varepsilon) = 0 = w(1, \varepsilon)$$

■

Proposition 3.2.4 *Si k est négatif et si δk n'est pas un entier négatif pair alors la solution du problème aux limites (3.2) pour (3.1) est infiniment proche de la somme de l'unique solution analytique u_0 du problème réduit (3.4) et de la solution $\tilde{u}$ de l'équation homogène associée à (3.1)*

$$\varepsilon u'' + 2\delta t u' + ku = 0$$

vérifiant les conditions aux limites

$$\tilde{u}(-1, \varepsilon) = A - u_0(-1) \text{ et } \tilde{u}(1, \varepsilon) = B - u_0(1)$$

Preuve. Je dois l'idée de cette preuve utilisant le principe du maximum à J-P. Roth.

Il suffit de montrer que la fonction w définie dans la proposition précédente est infiniment petite.

Supposons que w prend des valeurs positives. Soit alors t_0 tel que $w(t_0) = \max_{[-1,1]} w$. En t_0 on a alors $w'(t_0) = 0$ et $w''(t_0) \leq 0$, ce qui dans (3.5) donne

$$kw(t_0, \varepsilon) \geq H(t_0, \varepsilon)$$

et comme k est négatif,

$$w(t_0, \varepsilon) \leq \frac{1}{|k|} H(t_0, \varepsilon) \leq \frac{1}{|k|} \|H(\cdot, \varepsilon)\|_\infty$$

On en déduit que

$$\forall t \in [-1, 1] \quad w(t, \varepsilon) \leq \frac{1}{|k|} \|H(\cdot, \varepsilon)\|_\infty$$

Cette inégalité est encore vraie de façon évidente si w ne prend pas de valeurs positives.

CHAPITRE 3 : EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

En changeant w en $-w$ et H en $-H$ la même méthode nous donne

$$\forall t \in [-1, 1] \quad -w(t, \varepsilon) \leq \frac{1}{|k|} \|H(., \varepsilon)\|_{\infty}$$

et finalement

$$\|w(., \varepsilon)\| \leq \frac{1}{|k|} \|H(., \varepsilon)\|_{\infty}$$

Comme H converge uniformément vers 0 avec ε on en déduit la même chose pour w . ■

Ceci nous donne les deux résultats suivants.

Théorème 3.2.5 *Si δ et k sont négatifs, alors si u_0 est l'unique solution de l'équation réduite (3.4) et si u est la solution du problème aux limites (3.2) pour (3.1) on a*

$$\forall t \in]-1, 1[\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = u_0(t)$$

et cette limite est uniforme sur tout compact.

Théorème 3.2.6 *Si δ est positif et k est négatif et si $k \notin -2\mathbb{N}$, alors si u_0 est l'unique solution de l'équation réduite (3.4) et si u est la solution du problème aux limites (3.2) pour (3.1) on a*

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1, 1[\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = & u_0(t) + \frac{A+B-(u_0(-1)+u_0(1))}{2} |t|^{-\frac{k}{2}} \\ & + \frac{B-A+(u_0(-1)-u_0(1))}{2} t |t|^{-\frac{k}{2}-1} \end{aligned}$$

Chapter 4

Méthode géométrique

Dans cette partie nous allons montrer que les phénomènes de résonance rencontrés précédemment peuvent être expliqués par l'apparition d'un canard dans une équation de type Riccati sur le cylindre. La méthode employée pour étudier cette équation de Riccati sera celle de J.-L. Callot et fera usage de l'analyse non standard.

Nous montrerons que autour de certaines valeurs du paramètre k l'équation de Riccati présente des solutions canards. Ce sont ces solutions qui une fois intégrées donnent les solutions résonnantes de l'équation du second ordre. Nous utiliserons des arguments de parité pour trouver les solutions de l'équation de Riccati correspondant aux problèmes aux limites.

4.1 Résonance de Ackerberg et O'Malley

4.1.1 L'équation de Riccati

Dans ce chapitre nous allons à nouveau nous intéresser à l'équation

$$\varepsilon u'' - 2tu' + ku = 0 \quad (4.1)$$

et à sa solution vérifiant le problème aux limites

$$u(-1, \varepsilon) = A, u(1, \varepsilon) = B \quad (4.2)$$

avec A et B non tous deux nuls et k un réel positif (nous nous contenterons du cas positif, car c'est pour les valeurs positives de k que le phénomène de résonance a lieu).

Par le changement d'inconnue $\tan \Phi = \frac{u}{u'}$ où Φ est considéré comme un angle modulo π (ce changement d'inconnue a été introduit par J.-L. Callot dans sa thèse pour étudier le cas $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$) nous obtenons l'équation suivante

$$\varepsilon \Phi' = -2t \sin \Phi \cos \Phi + k \sin^2 \Phi + \varepsilon \cos^2 \Phi \quad (4.3)$$

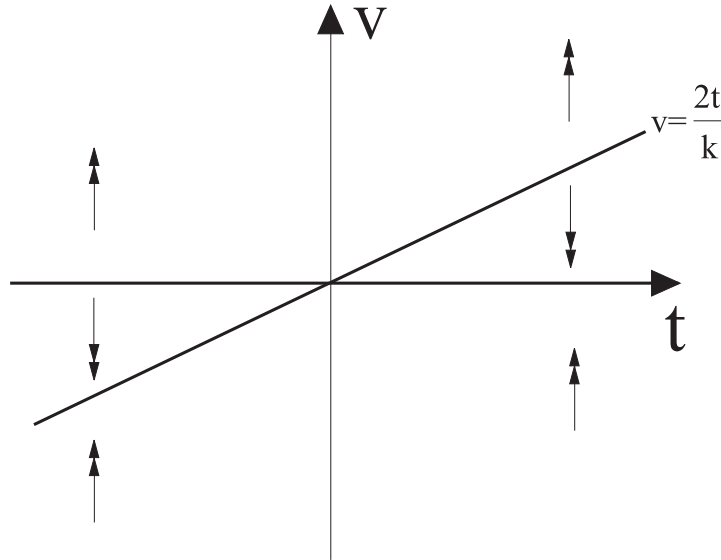
définie sur le cylindre $(t, \Phi) \in \mathbb{R} \times S^1$.

Une carte particulière de ce champ vectoriel est obtenue en posant $v = \frac{u}{u'}$. Nous obtenons alors l'équation

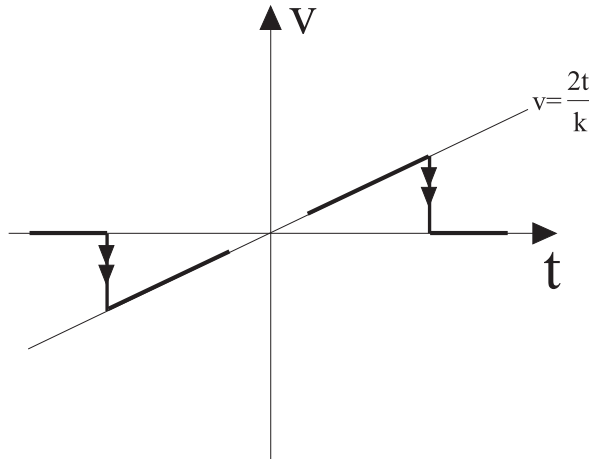
$$\varepsilon v' = \varepsilon - 2tv + kv^2 \quad (4.4)$$

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

qui dans le plan (t, v) présente un champ lent-rapide. La variété lente, définie par $2tv = kv^2$, est constituée des droites $v = 0$ et $v = \frac{2t}{k}$. Une étude du mouvement rapide montre que la droite $v = 0$ est attractive pour les t positifs et répulsive pour les t négatifs alors que la droite $v = \frac{2t}{k}$ est répulsive pour les t positifs et attractive pour les t négatifs.



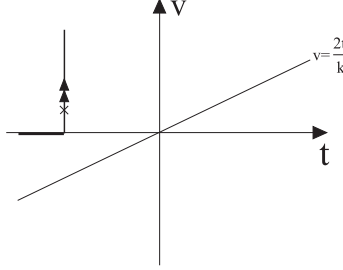
Ceci nous permet déjà de donner quelques indications sur les trajectoires de l'équation. Ainsi une trajectoire qui en un t négatif se trouve dans le secteur angulaire défini par les deux droites et qui n'est pas infiniment proche de celles-ci provient de la droite ($v = 0$) et va se précipiter vers ($v = \frac{2t}{k}$). De même pour les t positifs, la trajectoire provient de ($v = \frac{2t}{k}$) et va se précipiter vers ($v = 0$).



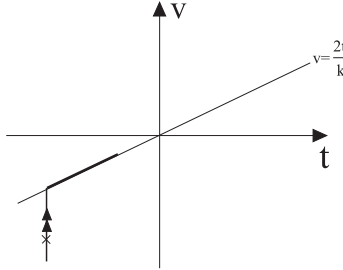
Une trajectoire qui en un t négatif se trouve appréciablement au-dessus de ($v =$

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

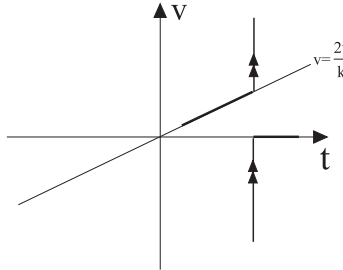
0) provient de cette droite et se précipite vers l'infini.



Une trajectoire qui en un t négatif de trouve appréciablement au-dessous de $(v = \frac{2t}{k})$ va se précipiter vers cette droite et provient de $-\infty$.



Les mêmes phénomènes ont lieu pour les t positifs.



Lemme 4.1.1 Soit u solution non nulle de (4.1). Soit $v = \frac{u}{u'}$. Alors v n'a que des pôles simples isolés entre lesquels v est solution de (4.4).

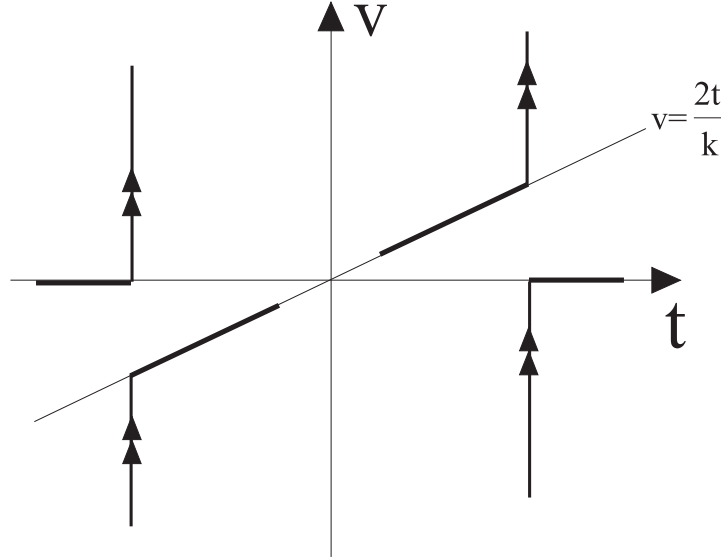
Preuve. Soit t_0 tel que $u'(t_0) = 0$.

Si $u''(t_0) = 0$ alors (4.1) donne $u(t_0) = 0$ et par unicité de la solution de (4.1) $u \equiv 0$ ce qui n'est pas. Donc $u(t_0)$ est non nul et t_0 est un pôle simple de v .

Entre les pôles v est solution de (4.4) par définition de cette équation. ■

Définition 4.1.2 Soit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que v n'admet que des pôles simples et entre deux pôles v est solution de (4.4). Une telle fonction sera appelée solution

généralisée de (4.4).



Une solution généralisée de (4.4) correspond en fait à une solution de 4.3 pour laquelle Φ passe par $\pm \frac{\pi}{2}$, c'est à dire une solution qui "fait le tour du cylindre". Nous allons maintenant nous intéresser au comportement limite des solutions généralisées de la forme $v = \frac{u}{u'}$.

4.1.2 Résultats de J.-L. Callot[6]

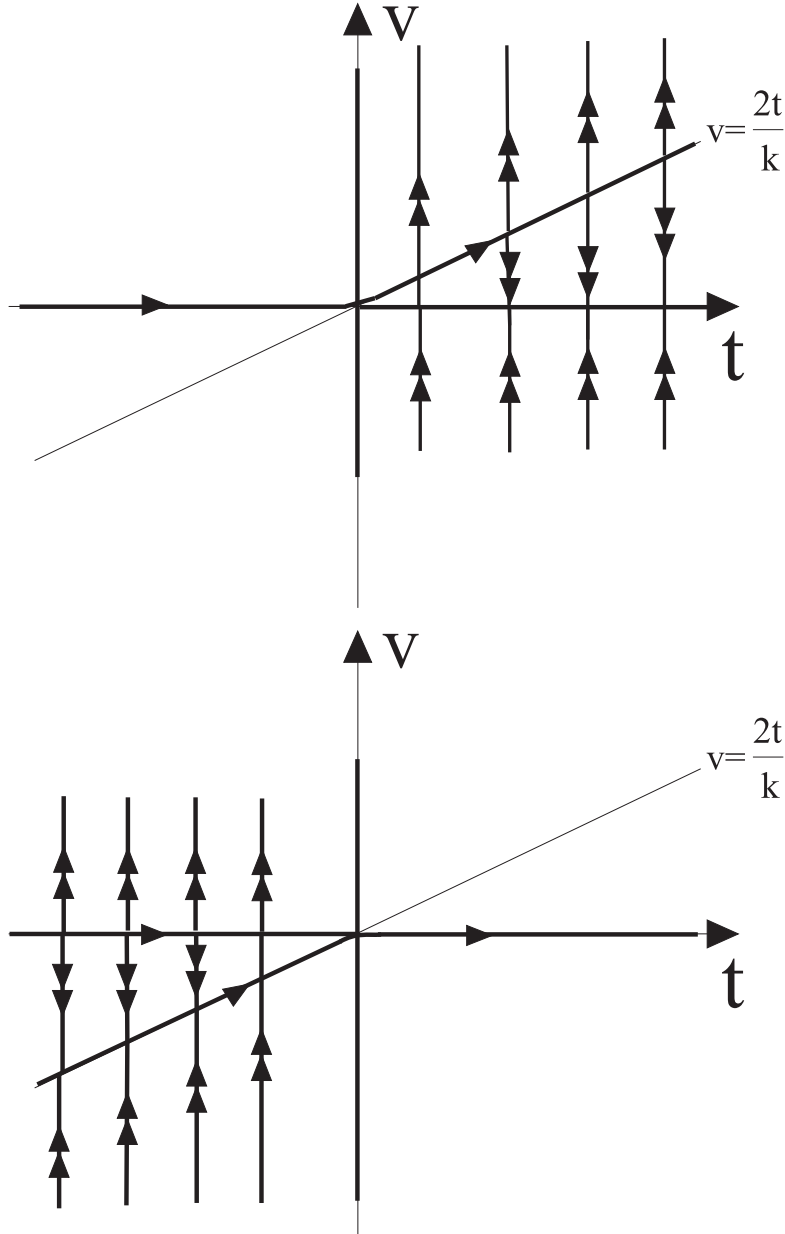
Nous allons ici utiliser l'analyse non standard. Nous allons donc dorénavant supposer ε infiniment petit fixé. En conséquence nous omettrons d'indiquer la dépendance en ε des différentes solutions.

Les résultats de cette section sont démontrés dans [6], nous donnons toutefois des énoncés des théorèmes légèrement différents pour mieux montrer le lien entre l'équation sur le cylindre et celle dans la carte particulière choisie.

Théorème 4.1.3 (*feuilletage normal*) Soit u solution de (4.1). Soit $v = \frac{u}{u'}$. Soit n_0 l'entier le plus proche de $k/2$. Alors, si $|k - 2n_0|^\varepsilon \simeq 1$:

1. v ne peut longer la droite $v = 2t/k$ que d'un côté de l'origine. Si l'ombre de v contient un segment de la droite $v = 2t/k$ avec t négatif (resp. positif) alors elle n'en contient aucun avec des t positifs (resp. négatifs).
2. Si l'ombre de v ne contient pas la demi-droite $(v = 0, t < 0)$, alors elle contient la demi-droite $(v = 0, t > 0)$.
3. Si l'ombre de v ne contient pas la demi-droite $(v = 0, t > 0)$, alors elle contient la demi-droite $(v = 0, t < 0)$.
4. Si l'ombre de v ne contient pas toute la droite $v = 0$, alors v a $[\frac{k}{2}]$ pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.

Preuve. [6] ■



Proposition 4.1.4 *Si k est un entier naturel pair, alors (4.1) admet une solution polynomiale. De plus les racines de cette solution sont dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.*

Preuve. Il suffit de remarquer qu'en posant $t = \sqrt{\varepsilon}T$, (4.1) est transformée en une équation de Hermite qui admet une solution polynomiale lorsque k est un entier naturel pair. De plus les racines de cette solution sont limitées, ce qui

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

fait que par le changement de variable $t = \sqrt{\varepsilon}T$ elles sont toutes amenées dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. ■

Notation 4.1.5 Lorsque k est un entier naturel pair on notera u_k la solution polynomiale de (4.1) telle que $u_k(1) = 1$. On notera alors $v_k = \frac{u_k}{u'_k}$ et Φ_k sera défini par $\tan \Phi_k = \frac{u_k}{u'_k}$.

Proposition 4.1.6 Si k est un entier naturel pair, l'ombre de v_k contient la droite $v = \frac{2t}{k}$.

Preuve. Soit $n_0 = k/2$. Posons $u_k(t) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n t^n$. (4.1) donne alors:

$$\begin{cases} 2\varepsilon a_2 + 2n_0 a_0 &= 0 \\ \varepsilon(i+2)(i+1)a_{i+2} - 2ia_i + 2n_0 a_i &= 0 \\ -2(n_0-1)a_{n_0-1} + 2n_0 a_{n_0-1} &= 0 \\ -2n_0 a_{n_0} + 2n_0 a_{n_0} &= 0 \end{cases}$$

a_{n_0} est donc quelconque ; il sera fixé par la condition supplémentaire

$$u_k(1) = 1$$

La troisième ligne donne $a_{n_0-1} = 0$, ce qui avec la deuxième ligne donne

$$a_{n_0-1-2i} = 0$$

La deuxième ligne montre également que a_{n_0-2} est infiniment petit, tout comme le seront par itération les autres a_{n_0-2i} .

On en conclut que pour les t standard

$$u_k(t) \simeq a_{n_0} t^{n_0}$$

Comme u_k est un polynôme de degré standard on a alors

$$u'_k \simeq n_0 a_{n_0} t^{n_0-1}$$

et donc

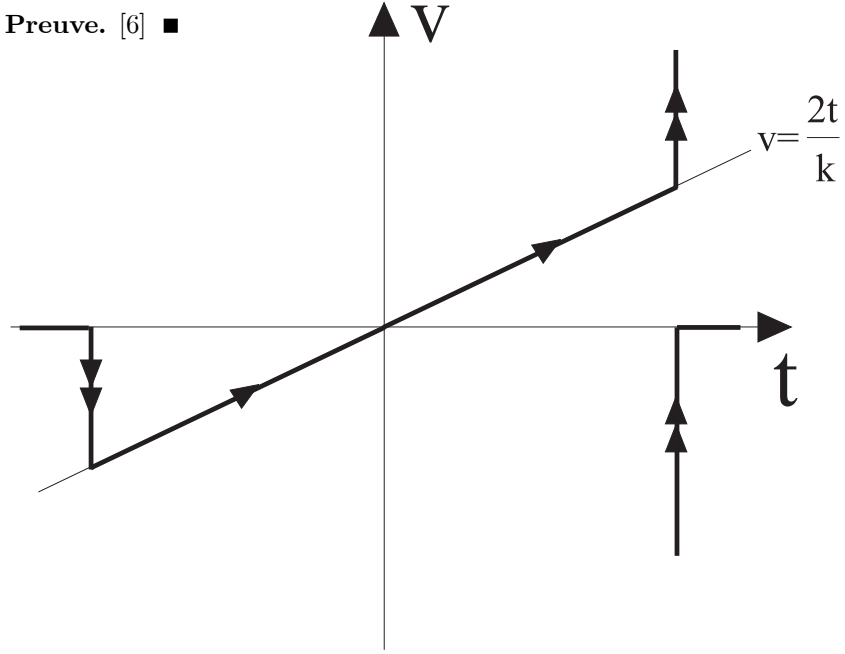
$$\forall t \neq 0, \quad v_k(t) \simeq t/n_0 = 2t/k$$

■

Théorème 4.1.7 (feuilletage à canards) Soit n_0 entier naturel et $k = 2n_0$. Soit u solution de (4.1). Soit $v = \frac{u}{u'}$. Supposons que v entre dans le halo de la droite $v = \frac{2t}{k}$ en $-t_0$. Alors

1. $\forall t \ll -t_0, v(t) \simeq 0$
2. L'ombre de v contient le segment $(v = \frac{2t}{k}, t \in [-t_0, t_0])$.
3. v sort du halo de $v = \frac{2t}{k}$ du même côté que celui par lequel elle est entrée.
4. $\forall t \gg t_0, v(t) \simeq 0$
5. v a le même nombre de pôles que v_k dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.

Preuve. [6] ■



Théorème 4.1.8 (*feuilletage à canards*) Soit n_0 entier naturel et $k = 2n_0$. Soit u solution de (4.1). Soit $\tan \Phi = \frac{u}{v}$. Supposons qu'il existe $t_0 \gg 0$ tel que $\Phi(-t_0)$ est infiniment proche de $\Phi_k(-t_0)$ et $t_1 > t_0$, $t_1 \simeq t_0$, tel que $\Phi(-t_1)$ n'est pas infiniment proche de $\Phi_k(-t_1)$. (C'est à dire que Φ entre dans le halo de Φ_k en $-t_0$. Alors

1. $\forall t \ll -t_0, \Phi(t) \simeq 0$
2. $\forall t \in]-t_0, t_0[, \Phi(t) \simeq \Phi_k(t)$
3. Φ sort du halo de Φ_k du même côté que celui par lequel elle est entrée.
4. $\forall t \gg t_0, \Phi(t) \simeq 0$

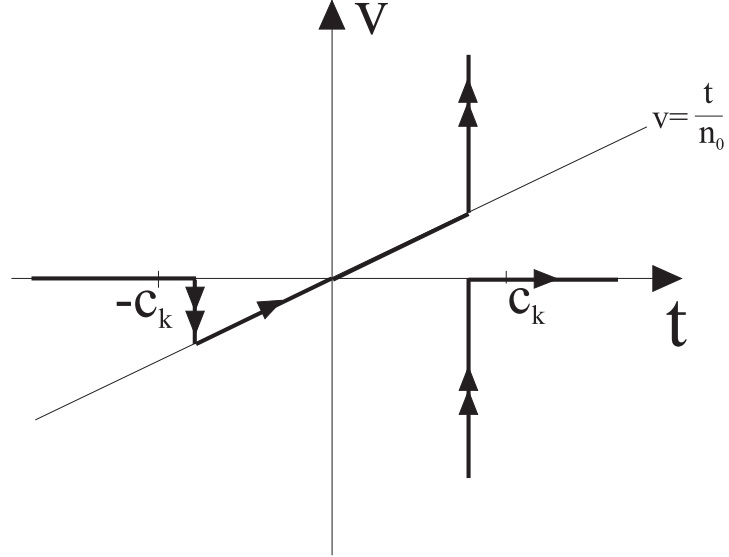
Preuve. [6] ■

Théorème 4.1.9 (*feuilletage mixte*) Soit n_0 l'entier naturel le plus proche de $k/2$. On suppose que k est différent de $2n_0$ mais en reste assez proche pour que $|k - 2n_0|^\varepsilon \ll 1$. Soit u solution de (4.1). Soit $v = \frac{u}{v}$. Soit c_k positif tel que $c_k^2 = o(-2\varepsilon \ln |k - 2n_0|)$. Alors

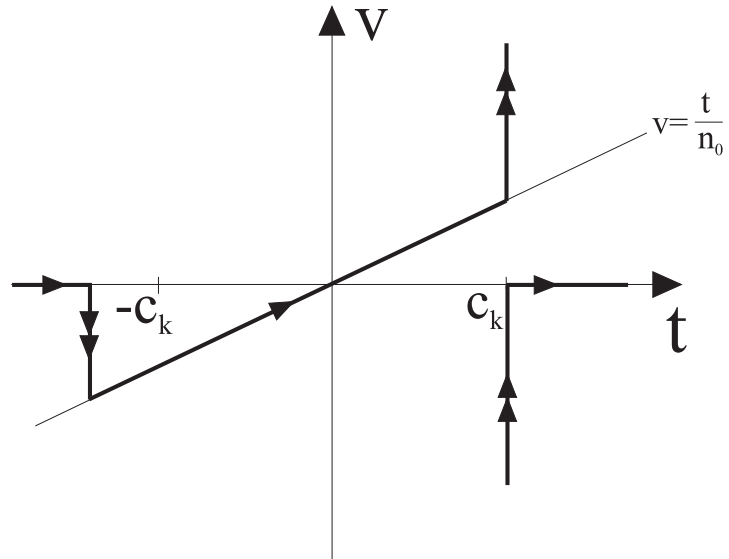
1. Si v entre dans le halo de $v = t/n_0$ en un t_0 tel que $-c_k \ll t_0 \ll c_k$ la

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

trajectoire est du même type que dans le cas du feuilletage à canards.

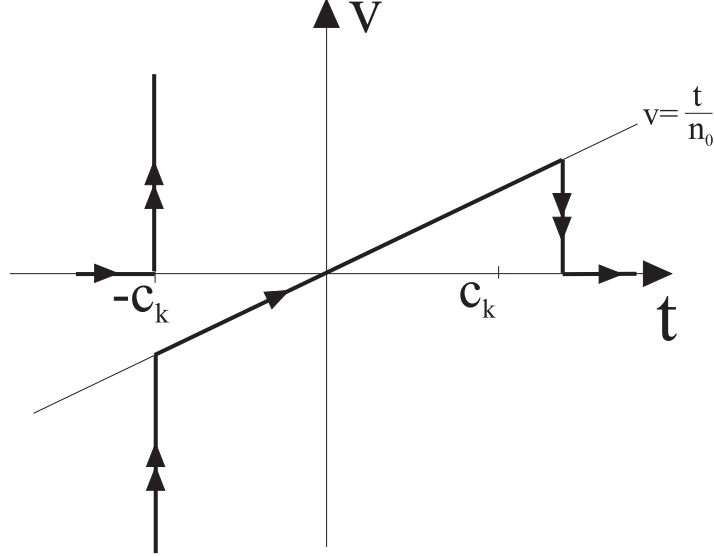


2. Si v entre dans le halo de $v = t/n_0$ en $t_0 \ll -c_k$ alors v sort du halo en c_k .



3. Si v sort du halo de $v = t/n_0$ en $t_0 \gg c_k$ alors elle est entrée dans le

halo en $-c_k$.



4. Toutes les solutions dont l'ombre contient un segment non réduit à un point de $v = t/n_0$ ont $n_0 - 1$ pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.

Preuve. [6] ■

4.1.3 Résonance et canards

Nous allons maintenant montrer que les canards de l'équation de Riccati permettent d'expliquer le phénomène de résonance énoncé dans le théorème 2.1.1. Pour ceci nous allons devoir relier les solutions de (4.1) vérifiant les conditions aux limites (4.2) à des solutions des équations de Riccati (4.3) et (4.4). Ceci sera fait en utilisant la parité.

Proposition 4.1.10 *L'équation (4.1) admet une solution paire u_P vérifiant $u_P(1) = 1$, et une solution impaire u_I vérifiant $u_I(1) = 1$. De plus ces solutions sont uniques.*

Preuve. Il suffit de remarquer que si $t \mapsto u(t)$ est solution de (4.1) alors $t \mapsto u(-t)$ l'est également.

Considérons u la solution de (4.1) vérifiant le problème aux limites $u(-1) = 1$, $u(1) = 2$ (en fait deux valeurs quelconques conviendraient pourvu que $u(-1) + u(1)$ et $u(-1) - u(1)$ soient non nuls). Cette solution existe d'après la première partie.

Par linéarité de l'équation, $t \mapsto \frac{u(t) + u(-t)}{(u(1) + u(-1))}$ qui est une fonction paire valant 1 en 1 est également solution de (4.1) tout comme $t \mapsto \frac{u(t) - u(-t)}{(u(1) - u(-1))}$ qui est une fonction impaire valant 1 en 1. D'où l'existence de u_P et u_I .

Leur unicité provient elle aussi de la linéarité de l'équation : par exemple s'il existait deux solutions paires valant 1 en 1 par parité elles vaudraient également 1 en -1 et leur différence vaudrait 0 en 1 et -1 et serait donc nulle. ■

A partir de ces deux solutions particulières nous pouvons retrouver toutes les solutions du problème aux limites. En effet si u est une solution de (4.1) vérifiant les conditions aux limites (4.2), alors $u = \frac{A+B}{2}u_P + \frac{B-A}{2}u_I$.

Nous allons noter $v_P = \frac{u_P}{u'_P}$ et $v_I = \frac{u_I}{u'_I}$. Comme u_P est paire, u'_P est impaire et donc v_P est impaire. De même v_I est impaire.

Cas non résonnant

Nous allons maintenant supposer que k n'est pas un entier naturel pair (k standard) et montrer que dans ce cas pour tout t de $] -1, 1[$, t non infiniment proche de -1 et de 1 la solution du problème aux limites est infiniment petite.

Lemme 4.1.11 *Soit $v = v_P$ ou v_I . Alors l'ombre de v contient le segment $(v = 0, t \in [-1, 1])$.*

Preuve. Que v soit égale à v_P ou à v_I nous savons que v est impaire. Si l'ombre de v contient un segment appréciable de $v = 2t/k$ pour des t négatifs, alors d'après le théorème 4.1.3 v va longer la droite $v = 0$ pour tous les t positifs. Elle ne pourrait donc pas être impaire. De même elle ne peut longer un segment appréciable de $v = 2t/k$ pour des t positifs. Sa seule possibilité est donc de longer tout le segment $(v = 0, t \in [-1, 1])$. ■

Lemme 4.1.12 *Soit u solution de (4.1) telle que $v = \frac{u}{u'}$ soit infiniment petite pour $t \in]0, 1], t \gg 0$. Alors $v(t)$ est positif pour $t \gg 0$.*

Preuve. Si il existe $t_1 > 0$ tel que $v(t_1) > 0$ alors pour tout t supérieur à t_1 on a $v(t) > 0$. En effet, pour les t positifs, si $v = 0$ on a $v' > 0$. La demi-droite $(v = 0, t > 0)$ constitue ainsi un piège à trajectoire. La seule possibilité pour v de devenir négative serait de faire un tour du cylindre, ce qui est impossible car v reste infiniment petit. Il nous reste à prouver qu'il existe un tel t_1 qui est de plus infiniment petit.

Pour ceci nous allons remarquer le fait que si t est positif et v négatif, alors v' est supérieur à 1. En conséquence s'il existe t_2 positif tel que $v(t_2)$ soit infiniment petit alors il existe t_3 infiniment proche de t_2 et supérieur à t_2 pour lequel $v(t_3)$ est positif. Par hypothèse v est positif pour tout t appréciable positif. Donc par permanence il existe un tel t_2 qui est infiniment petit. Il existe donc t_3 infiniment petit tel que $v(t_3) > 0$. D'où le lemme. ■

Nous pouvons désormais conclure dans le cas non résonnant.

Proposition 4.1.13 *Soit u solution de (4.1) vérifiant les conditions aux limites (4.2). Alors si k n'est pas un entier naturel pair, u est infiniment petite pour tout t de $] -1, 1[$, t non infiniment proche de -1 , de 0 et de 1 .*

Preuve. Le lemme 4.1.11 montre que v_P est infiniment petite pour les $t \gg 0$. Le lemme 4.1.12 nous montre alors que v_P est de plus positive pour les $t \gg 0$.

Par intégration nous avons

$$u_P(t) = \exp\left(-\int_t^1 \frac{1}{v_P(s)} ds\right) \simeq 0$$

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

pour tout t de $]0, 1[$, t non infiniment proche de 0 et de 1. Comme u_P est paire, Nous avons également $u_P(t) \simeq 0$ pour tout t de $] -1, 0[$, t non infiniment proche de 0 et de -1 .

La même méthode donne le même résultat pour u_I .

Comme $u = \frac{A+B}{2}u_P + \frac{B-A}{2}u_I$, on en déduit la proposition. ■

Cas résonnant

Nous allons maintenant nous intéresser au cas $k = 2n_0$ avec n_0 un entier naturel standard et nous allons montrer la proposition suivante:

Proposition 4.1.14 *Si $k = 2n_0$, alors la solution du problème aux limites n'est pas infiniment petite. Plus précisément:*

Si n_0 est pair alors $u(t)$ est infiniment proche de $\frac{A+B}{2}t^{n_0}$ pour tout $t \in]-1, 1[$, t non infiniment proche de -1 et de 1 .

Si n_0 est impair alors $u(t)$ est infiniment proche de $\frac{B-A}{2}t^{n_0}$ pour tout $t \in]-1, 1[$, t non infiniment proche de -1 et de 1 .

Pour montrer cette proposition nous allons réutiliser les fonctions u_k , v_k et Φ_k définies précédemment. (u_k étant la solution polynomiale de (4.1) valant 1 en 1.) Avant de passer à la preuve de la proposition nous allons tout d'abord exhiber une propriété de la fonction u_k .

Lemme 4.1.15 *Si n_0 est pair, alors $u_k = u_P$. Si n_0 est impair, alors $u_k = u_I$.*

Preuve. Posons $u_k(t) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n t^n$. (4.1) donne alors:

$$\begin{cases} 2\varepsilon a_2 + 2n_0 a_0 &= 0 \\ \varepsilon(i+2)(i+1)a_{i+2} - 2ia_i + 2n_0 a_i &= 0 \\ -2(n_0-1)a_{n_0-1} + 2n_0 a_{n_0-1} &= 0 \\ -2n_0 a_{n_0} + 2n_0 a_{n_0} &= 0 \end{cases}$$

La troisième ligne nous donne $a_{n_0-1} = 0$. Avec la deuxième ligne nous avons alors $a_{n_0-2n+1} = 0$ pour tout entier naturel n .

Ainsi si n_0 est pair tous les coefficients des termes impairs sont nuls et u_k est pair. Comme de plus $u_k(1) = 1$ on en déduit que $u_k = u_P$.

De même si n_0 est impair, $u_k = u_I$. ■

Nous allons maintenant donner la preuve de la proposition.

Preuve. Supposons n_0 pair.

Le lemme précédent donne $u_P = u_k$ et $v_P = v_k \simeq 2t/k$ (d'après la proposition 4.1.6). Par intégration nous obtenons $u_P \simeq t^{n_0}$.

Nous devons maintenant étudier le comportement de u_I .

Supposons qu'il existe $t_0 \gg 0$ tel que $v_I(-t_0) \simeq -2t_0/k$. Alors Φ_I est infiniment proche de Φ_k pour $t \in]-t_0, t_0[$. En particulier $\Phi_I(0) \simeq \Phi_{2n_0}(0)$. Mais $\Phi_I(0) = 0$ (comme u_I est impaire, $u_I(0) = 0$) et $\Phi_{2n_0}(0) = \Phi_P(0) = \pi/2$ (comme u_P est paire $u'_P(0) = 0$). Il y a contradiction. Donc t_0 n'existe pas et v_0 est infiniment petit en dehors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. Comme dans le cas non résonnant nous en concluons que v_I est infiniment petit pour $t \in]-1, 1[$ non infiniment proche de -1 , de 0 et de 1.

Avec $u = \frac{A+B}{2}u_P + \frac{B-A}{2}u_I$ nous avons le résultat voulu.

La même méthode fonctionne pour n_0 impair. ■

4.2 L'équation $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$

4.2.1 L'équation de Riccati

Dans cette section nous allons à nouveau nous intéresser à l'équation

$$\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0 \quad (4.5)$$

et à sa solution vérifiant le problème aux limites

$$u(-1, \varepsilon) = A, u(1, \varepsilon) = B \quad (4.6)$$

avec A et B non tous deux nuls et k un réel standard.

Comme à la section précédente nous allons relier le phénomène de résonance pour ce problème aux limites à un phénomène de canard pour une équation de Riccati sur le cylindre. Pour ceci nous faisons le changement d'inconnue $\tan \Phi = \frac{u}{u'}$ où Φ est considéré comme un angle modulo π nous obtenons l'équation suivante

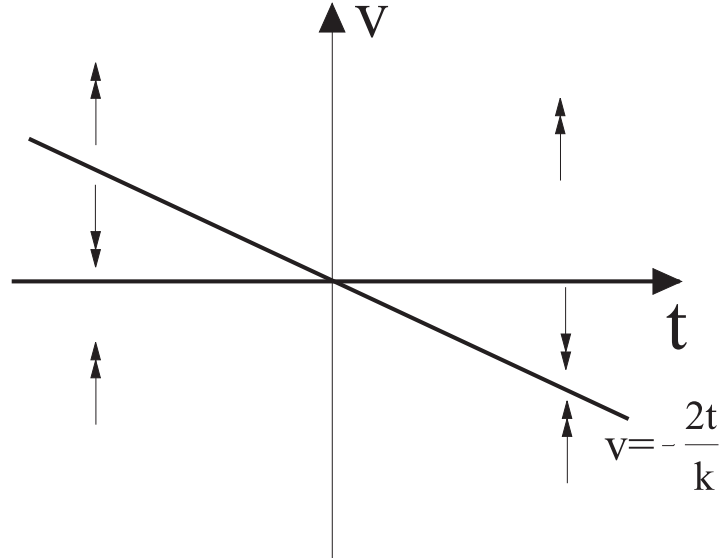
$$\varepsilon \Phi' = +2t \sin \Phi \cos \Phi + k \sin^2 \Phi + \varepsilon \cos^2 \Phi \quad (4.7)$$

définie sur le cylindre $(t, \Phi) \in \mathbb{R} \times S^1$.

Une carte particulière de ce champ vectoriel est obtenue en posant $v = \frac{u}{u'}$. Nous obtenons alors l'équation

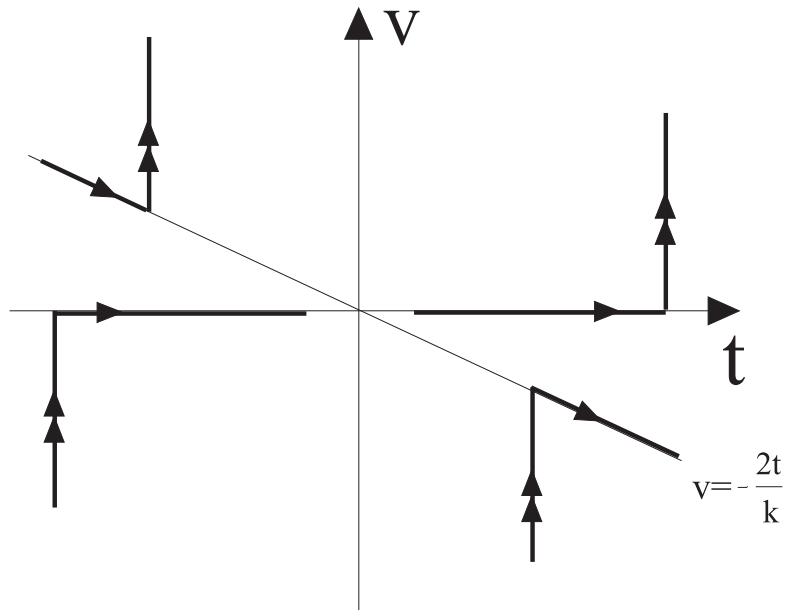
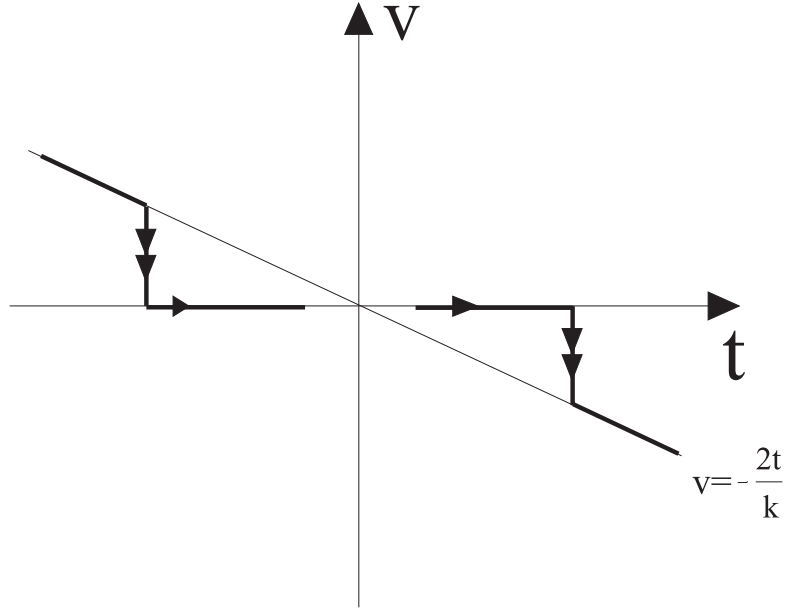
$$\varepsilon v' = \varepsilon + 2tv + kv^2 \quad (4.8)$$

qui dans le plan (t, v) présente un champ lent-rapide. La variété lente, définie par $2tv = -kv^2$, est constituée des droites $v = 0$ et $v = -\frac{2t}{k}$. Une étude du mouvement rapide montre que la droite $v = 0$ est répulsive pour les t positifs et attractive pour les t négatifs alors que la droite $v = -\frac{2t}{k}$ est attractive pour les t positifs et répulsive pour les t négatifs.



CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Comme précédemment ceci nous donne quelques informations sur le comportement des trajectoires

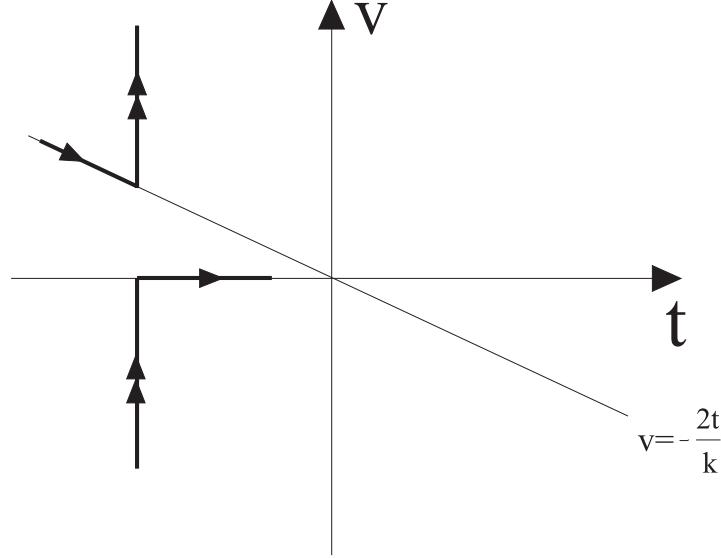


Lemme 4.2.1 Soit u solution non nulle de (4.5). Soit $v = \frac{u}{u'}$. Alors v n'a que des pôles simples isolés entre lesquels v est solution de (4.8).

La démonstration de ce lemme est la même que dans le cas du lemme 4.1.1.

Définition 4.2.2 Soit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que v n'admet que des pôles simples et entre deux pôles v est solution de (4.8). Une telle fonction sera appelée solution

généralisée de (4.8).



Une solution généralisée de (4.8) correspond en fait à une solution de (4.7) pour laquelle Φ passe par $\pm\frac{\pi}{2}$, c'est à dire une solution qui "fait le tour du cylindre". Nous allons maintenant nous intéresser au comportement limite des solutions généralisées de la forme $v = \frac{u}{u'}$.

4.2.2 Canards de l'équation de Riccati

Comme précédemment nous allons utiliser l'analyse non standard et supposer que ε est un réel positif infiniment petit.

La première chose à faire va être de trouver les solutions canard maximales, qui dans le cas de l'équation de type Ackerberg et O'Malley étaient données par les polynômes de Hermite. Ceci sera fait à partir d'un changement de variable qui ramène l'équation (4.5) à une équation de type Hermite.

Proposition 4.2.3 *Soit n_0 un entier naturel strictement positif. Soit $k = 2n_0$. Alors il existe une solution u_k de (4.5) telle que $v_k = \frac{u_k}{u'_k}$ soit infiniment petite pour tout t en dehors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero. De plus v_k a n_0 pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero.*

Preuve. Nous allons chercher une solution de (4.5) sous la forme $u(t) = e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} y$. Nous obtenons alors l'équation

$$\varepsilon y'' - 2ty' + (k - 2)y = 0$$

Ce qui avec $T = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$ donne

$$\frac{d^2 y}{dT^2} - 2T \frac{dy}{dT} + (k - 2)y = 0$$

Il s'agit d'une équation de type Hermite. Cette équation admet comme solution un polynôme de degré $\frac{k-2}{2}$. Soit P_k ce polynôme. Nous pouvons prendre $u_k = e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$ comme solution de (4.5).

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Nous avons alors

$$v_k = \frac{e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} [-\frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})]} = \frac{P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}$$

Nous avons donc v_k sous la forme $v_k = \sqrt{\varepsilon} R(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$ avec R une fraction rationnelle standard. Comme le dénominateur dans R est de degré supérieur à celui du numérateur on a $R(\tau) \simeq 0$ pour tout τ infiniment grand. On en déduit que v_k est infiniment petit en dehors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero.

Il nous reste à étudier les pôles de v_k , c'est à dire les zeros de son dénominateur qui est u'_k . P_k étant un polynôme de Hermite standard de degré $\frac{k-2}{2}$, on sait qu'il admet $\frac{k-2}{2}$ racines standard distinctes. On en déduit que u_k s'annule exactement $\frac{k-2}{2}$ fois et que tous ses zeros sont dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero. Comme de plus $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u_k(t) = 0$ on en déduit que u'_k admet au moins $\frac{k-2}{2} + 1 = n_0$ racines. Comme u'_k est de la forme un exponentielle qui ne s'annule pas multipliée par un polynôme de degré n_0 , on en déduit que u'_k a exactement n_0 racines simples. De plus comme en dehors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero $-\frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$ est infiniment grand devant $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$, u'_k est du signe de $-\frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$. Or en dehors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero $P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$ ne s'annule pas et est donc de signe constant. On en déduit la même chose pour $-\frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$ et donc pour u'_k . Les zeros du u'_k étant simples ils ne peuvent donc être que dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero. ■

Lemme 4.2.4 *Si t n'est pas dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero, alors $v_{2n_0}(t) = -\frac{\varepsilon}{2t}(1 + \emptyset)$ (où $\emptyset$ désigne un infiniment petit).*

Preuve. Dans la preuve précédente nous avons établi que

$$v_k = \frac{P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{-\frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{-\frac{2t}{\varepsilon} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2t} \frac{P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}\right)} \\ &= -\frac{\varepsilon}{2t} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2t} \frac{P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}} \end{aligned}$$

Or en dehors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2t} \frac{P'_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}{P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}$ est infiniment petit. D'où le résultat. ■

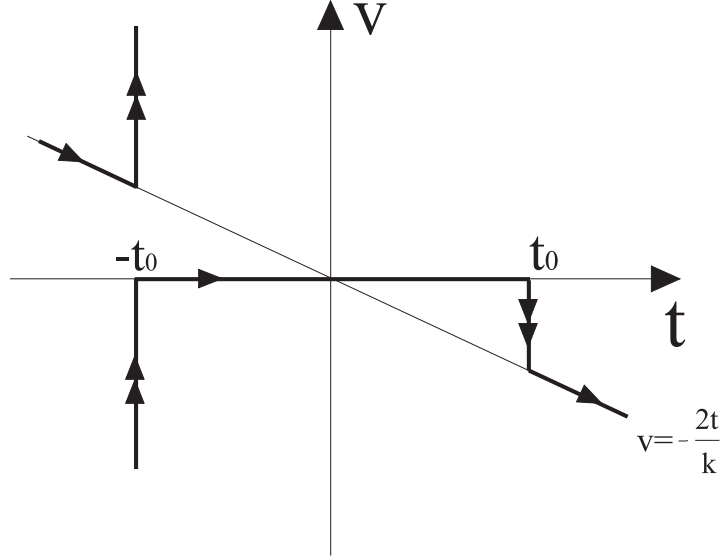
Notation 4.2.5 *Nous noterons Φ_k la fonction sur le tore définie par $\tan \Phi_k = \frac{u_k}{u'_k}$.*

Les résultats précédents vont nous permettre de donner dans le cas de l'équation (4.5) des résultats similaires à ceux obtenus par J-L. Callot pour l'équation (4.1). Nous emploierons pour ce faire les méthodes de J-L. Callot

en revenant plus en détail sur certains points, notamment le passage dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero qui se fait en utilisant à la fois l'équation sur le cylindre et l'équation dans la carte particulière donnée par v . Nous donnerons également une preuve plus détaillée du cas sans canard.

Théorème 4.2.6 (*feuilletage à canards*) Soit $k = 2n_0$ avec n_0 un entier strictement positif. Soit v solution généralisée de (4.8). Soit t_0 appréciable positif. On suppose que v entre dans le halo de $v = 0$ en $-t_0$. Alors

1. $\forall t \ll -t_0, t \text{ limité}, v(t) \simeq -\frac{2t}{k}$.
2. Pour tout t de $] -t_0, t_0[$, t n'appartenant pas à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de zero et t non infiniment proche de $-t_0$ et t_0 , $v(t)$ est infiniment petit.
3. v sort du halo de la droite $v = 0$ en t_0 du même côté que celui par lequel il est entré dans le halo de la droite.
4. $\forall t \gg t_0, t \text{ limité} v(t) \simeq -\frac{2t}{k}$.
5. v a le même nombre de poles que v_k .



Théorème 4.2.7 (*feuilletage à canards*) Soit $k = 2n_0$ avec n_0 un entier strictement positif. Soit Φ solution de (4.7). Soit t_0 appréciable positif. On suppose que Φ devient infiniment proche de Φ_k en t_0 . Alors

1. $\forall t \ll -t_0, t \text{ limité}, \tan \Phi(t) \simeq -\frac{2t}{k}$.
2. $\forall t \in] -t_0, t_0[\Phi(t) \simeq \Phi_k(t)$.
3. Φ sort du halo de Φ_k en t_0 du même côté que celui par lequel elle est entrée.
4. $\forall t \gg t_0, t \text{ limité}, \tan \Phi(t) \simeq -\frac{2t}{k}$.

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

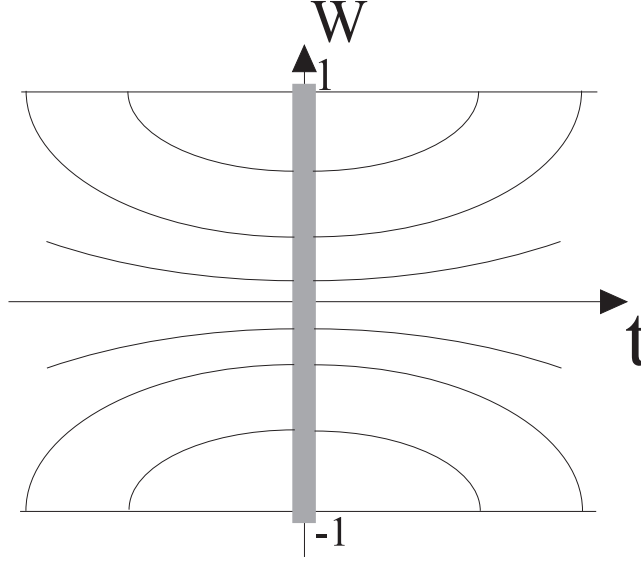
Preuve. · Le point 1 est la conséquence du théorème de Tychonov.

· Soit $w = v - v_k$. w est solution de $\varepsilon w' = w(2t + k(w + 2v_k))$.

Dans cette équation nous posons $W = w^{[\varepsilon]}$ où $x^{[\varepsilon]}$ désigne la fonction impaire coïncidant avec x^ε pour les x positifs. L'équation devient alors

$$W' = W(2t + k(2v_k + W^{[1/\varepsilon]}))$$

Si w est infiniment petit et t n'est pas dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0, alors $W^{[1/\varepsilon]}$ et v_k sont infiniment petits et $W' \simeq 2tW$. Ce qui donne $W \simeq C. \exp t^2$ pour les t extérieurs à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. Nous avons donc $v \simeq v_k$ jusqu'à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0



Pour voir ce qui se passe dans cette galaxie nous allons utiliser l'équation sur le cylindre.

Dans (4.7) on pose $\Gamma = [\sin(\Phi - \Phi_k)]^{[\varepsilon]}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \Gamma' &= [2t(\sin \Phi \cos \Phi - \sin \Phi_k \cos \Phi_k) + k(\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_k) \\ &\quad + \varepsilon(\cos^2 \Phi - \cos^2 \Phi_k)] \cos(\Phi - \Phi_k) [\sin(\Phi - \Phi_k)]^{[\varepsilon-1]} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sin \Phi \cos \Phi - \sin \Phi_k \cos \Phi_k &= \sin \Phi \cos \Phi [\sin^2 \Phi_k + \cos^2 \Phi_k] \\ &\quad - \sin \Phi_k \cos \Phi_k [\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi] \\ &= (\sin \Phi \cos \Phi_k - \cos \Phi \sin \Phi_k) \\ &\quad \cdot (\cos \Phi \cos \Phi_k - \sin \Phi \sin \Phi_k) \\ &= \sin(\Phi - \Phi_k) \cos(\Phi + \Phi_k) \end{aligned}$$

$$\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_k = \sin(\Phi - \Phi_k) \sin(\Phi + \Phi_k)$$

et

$$\cos^2 \Phi - \cos^2 \Phi_k = -\sin(\Phi - \Phi_k) \sin(\Phi + \Phi_k)$$

Finalement on obtient

$$\Gamma' = [2t \cos(\Phi + \Phi_k) - (\varepsilon - k) \sin(\Phi + \Phi_k)] \cos(\Phi - \Phi_k) \Gamma$$

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Γ est liée à W par $\Gamma = (\sin \Phi \cos \Phi_k - \cos \Phi \cos \Phi_k)^{[\varepsilon]}$, ce qui donne

$$\Gamma = W[\cos \Phi \cos \Phi_k]^{[\varepsilon]}$$

Soit t_2 positif infiniment petit mais n'appartenant pas à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. On sait déjà que $v(-t_2) \simeq v_k(-t_2)$. Donc $\Phi(-t_2) \simeq \Phi_k(-t_2)$. Comme t_2 n'est pas dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0, v est limité et $\Phi_k(-t_2)$ n'est pas infiniment proche de $\frac{\pi}{2}$. Doù $|\cos \Phi(-t_2)| >> 0$ et $|\cos \Phi_k(-t_2)| >> 0$. On a donc $\Gamma(-t_2) \simeq W(-t_2)$.

Entre $-t_2$ et t_2 Γ varie infiniment peu. Donc Φ reste infiniment proche de Φ_k dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. Comme $\Phi_k(t_2)$ n'est pas infiniment proche de $\frac{\pi}{2}$ on a $\Gamma(t_2) \simeq W(t_2)$ et donc W varie infiniment peu dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.

Tant que w reste infiniment petit (c'est à dire que $|W|$ est inférieur à 1) W va donc rester infiniment proche de la même courbe de type $C \exp t^2$.

Le fait que l'abscisse à laquelle la solution sort du halo est l'opposée de celle à laquelle elle est entrée se déduit du fait que si la solution entre dans (respectivement sort du) le halo de la droite ($v = 0$) dans le plan (t, v) en t_0 alors la solution W correspondante est infiniment proche de $+1$ ou -1 en t_0 . Pour montrer ceci, par exemple dans le cas de l'entrée, il faut remarquer que tant que v n'est pas dans le halo de ($v = 0$) la solution est quasi-verticale. C'est donc encore le cas jusqu'en un $t_1 \simeq t_0$ tel que $v(t_1) \simeq 0$. Or si en t_0 on avait $|W| << 1$ on aurait aussi $|W(t_1)| << 1$. Mais alors en remontant le temps la solution W longe une exponentielle pendant un temps appréciable tout en restant appréciablement inférieure à 1 en valeur absolue. En revenant à v , cela signifie qu'en remontant le temps, v reste dans le halo de ($v = 0$) pendant un temps appréciable avant t_1 , ce qui contredit la quasi-verticalité de la solution jusqu'en t_1 .

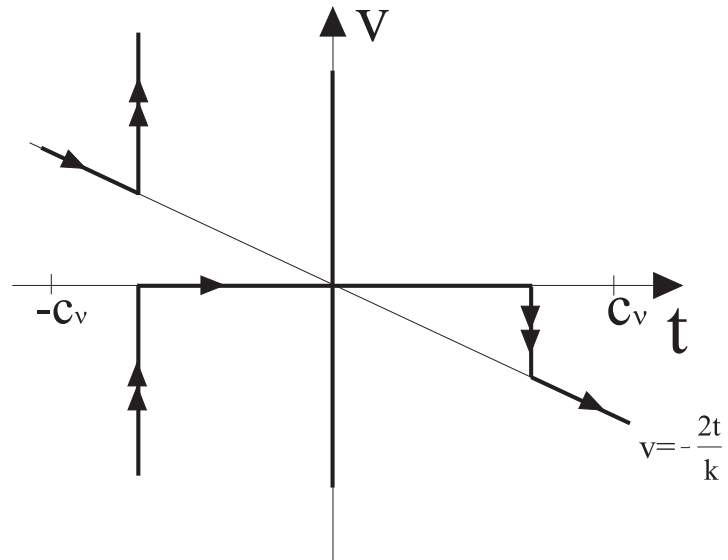
D'où les résultats annoncés, le point 4 étant conséquence du théorème de Tychonov. ■

Théorème 4.2.8 (*feuilletage mixte*) Soit k réel strictement positif. Soit n_0 l'entier naturel le plus proche de $\frac{k}{2}$. Soit $\nu = k - 2n_0$.

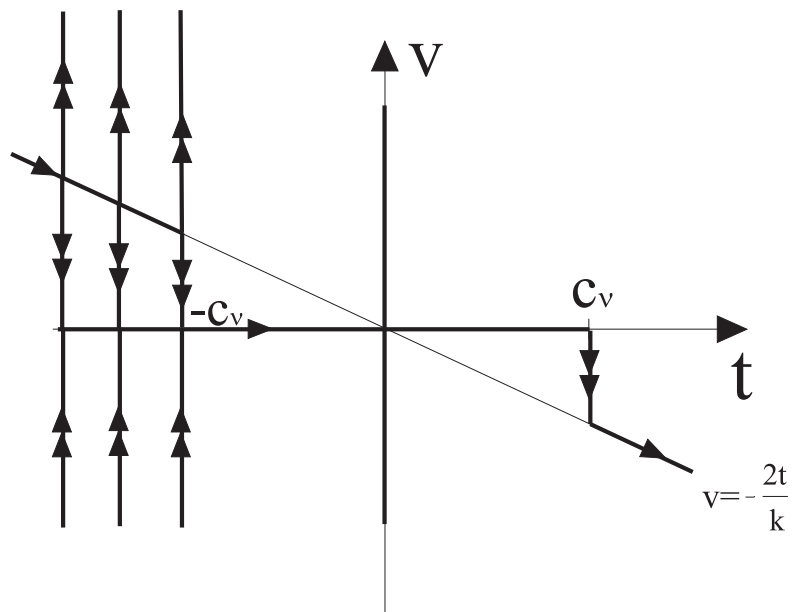
Si $0 << |\nu|^\varepsilon << 1$ alors : soit c_ν défini par $c_\nu^2 = {}^\circ(-2\varepsilon \ln |\nu|)$ où ${}^\circ$ désigne l'ombre, soit v solution généralisée de (4.5). On a :

1. Si v entre dans le halo de $v = 0$ en t_0 tel que $-c_\nu << t_0 << c_\nu$, la

trajectoire est semblable au cas canard.

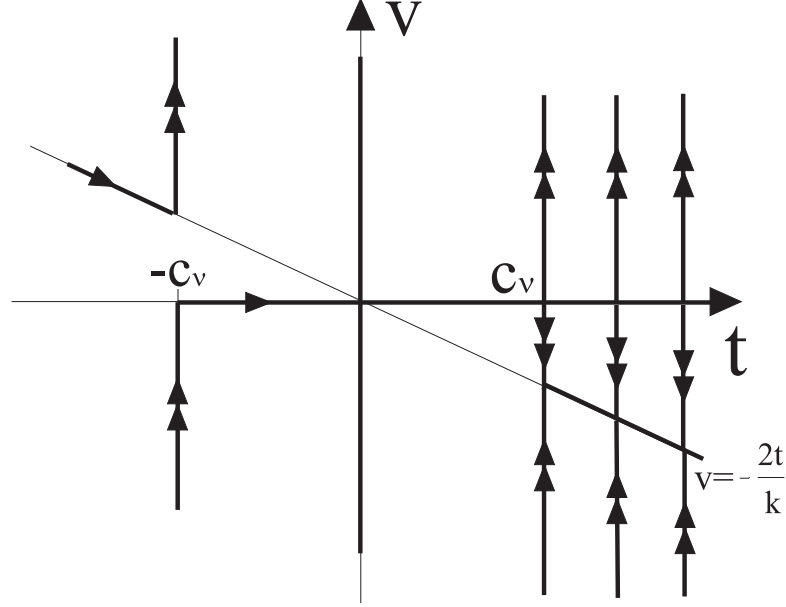


2. Si v entre dans le halo de $v = 0$ en $t_0 \ll -c_\nu$ alors v sort du halo de $v = 0$ en c_ν , vers le haut si ν est positif et le bas si ν est négatif.



3. Si v sort du halo de $v = 0$ en $t_0 \gg c_\nu$ alors v est entré dans le halo de $v = 0$ en $-c_\nu$. De plus l'entrée s'est faite par le bas si ν est positif et le

haut si ν est négatif.



4. Si l'ombre de v contient un segment non réduit à un point de $v = 0$, alors v a n_0 pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0

Preuve. Soit $w = v - v_{2n_0}$. On a $\varepsilon w' = (\nu + 2n_0)v^2 + 2tv - (\nu + 2n_0)v_{2n_0}^2 - 2tv_{2n_0} + \nu v_{2n_0}^2$ ce qui donne $\varepsilon w' = 2tw + k(v^2 - v_{2n_0}^2) + \nu v_{2n_0}^2$.
Et finalement $\varepsilon w' = 2tw + k(w + 2v_{n_0})w + \nu v_{2n_0}^2$.
Dans cette équation on pose $W = w^{[\varepsilon]}$. Ce qui donne

$$W' = W(2t + k(2v_{2n_0} + W^{[1/\varepsilon]}) + \frac{\nu v_{2n_0}^2}{W^{[1/\varepsilon]}}).$$

Si w est infiniment petit et t n'est pas dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 nous obtenons alors

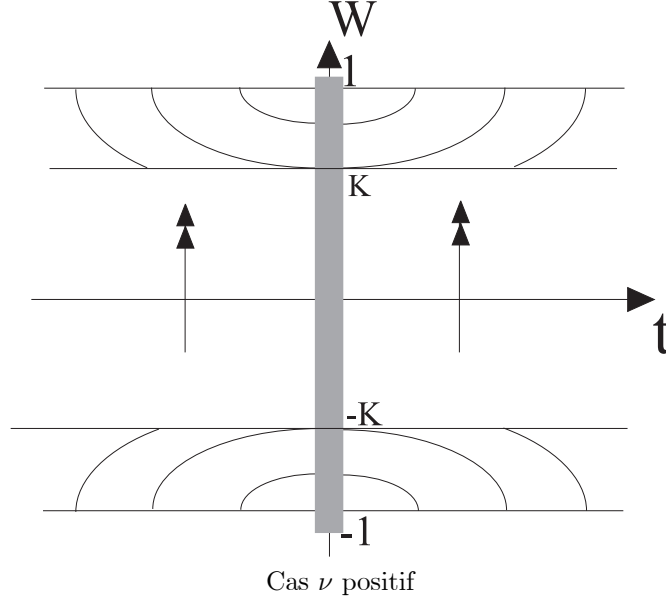
$$W' \simeq W(2t + \frac{\nu \varepsilon^2}{4t^2 W^{[1/\varepsilon]}})$$

Soit $K = |\nu|^\varepsilon$. Alors $K \simeq \left| \frac{\nu \varepsilon^2}{4t^2} \right|^\varepsilon$ pour t limité non infiniment petit..

Si $|W| \gg K$ alors $\frac{\nu \varepsilon^2}{4t^2 W^{[1/\varepsilon]}}$ est infiniment petit et $W' \simeq 2tW$ qui s'intègre en $W = C.e^{t^2}$

Si $|W| \ll K$ alors $\frac{\nu \varepsilon^2}{4t^2 W^{[1/\varepsilon]}}$ est infiniment grand et W' est infiniment grand

et du signe de ν .



Comme nous nous intéressons ici aux w infiniment petits, c'est à dire aux W de valeur absolue inférieure à 1, la bande $|W| \gg K$ ne sera visible que pour $K \ll 1$. De plus, comme dans le cas du feuilletage à canards, le problème de la traversée de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 est résolu en revenant au champ sur le cylindre.

Dans (4.7) on pose $\Gamma = [\sin(\Phi - \Phi_{2n_0})]^{[\varepsilon]}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \Gamma' = & [2t(\sin \Phi \cos \Phi - \sin \Phi_{2n_0} \cos \Phi_{2n_0}) + k(\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_{2n_0}) \\ & + \varepsilon(\cos^2 \Phi - \cos^2 \Phi_{2n_0}) + \nu \sin^2 \Phi_{2n_0}] \cos(\Phi - \Phi_{2n_0}) [\sin(\Phi - \Phi_{2n_0})]^{[\varepsilon-1]} \end{aligned}$$

Ce qui après simplifications donne

$$\Gamma' = \Gamma \left[2t \cos(\Phi + \Phi_{2n_0}) + (2n_0 - \varepsilon) \sin(\Phi + \Phi_{2n_0}) + \frac{\nu \sin^2 \Phi_{2n_0}}{\Gamma^{[1/\varepsilon]}} \right] \cos(\Phi - \Phi_{2n_0})$$

Si $|\Gamma|$ est appréciablement supérieur à K alors $\frac{\nu \sin^2 \Phi_{2n_0}}{\Gamma^{[1/\varepsilon]}}$ est infiniment petit et comme dans le cas du feuilletage à canards Γ' est limité. Soit t_2 infiniment petit positif extérieur à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. Si $|W(-t_2)| \gg K$ alors $|\Gamma(-t_2)| \gg K$. On en déduit que $\Gamma(t_2) \simeq \Gamma(-t_2)$ et donc que $W(t_2) \simeq W(-t_2)$.

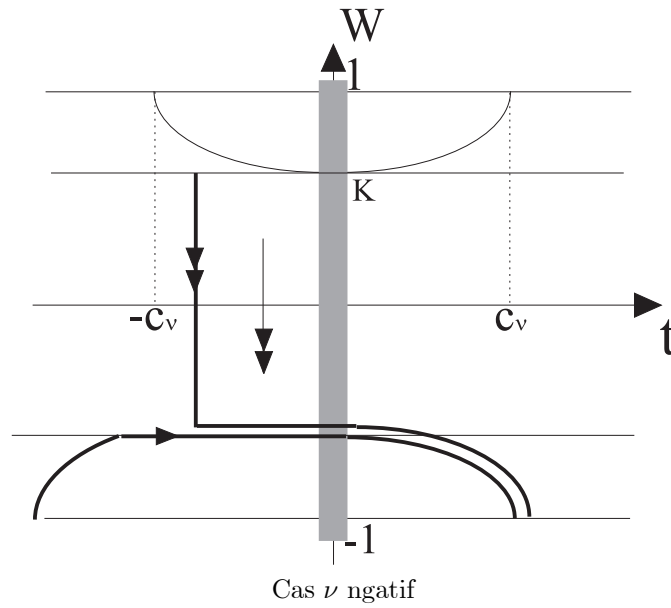
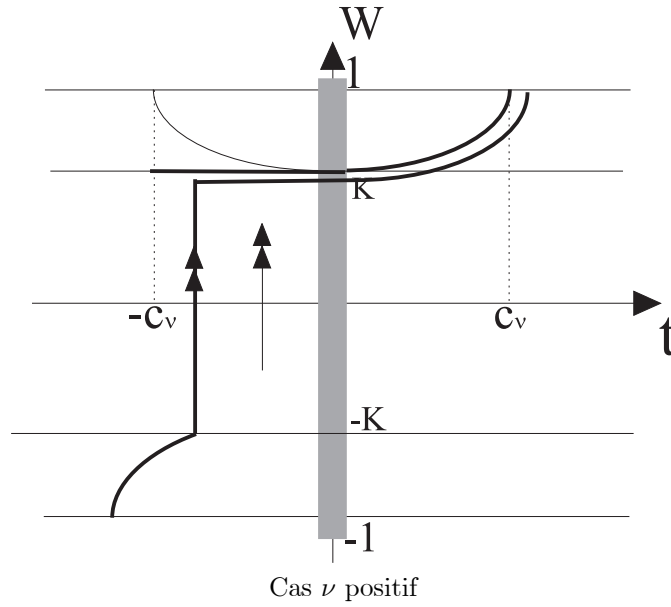
Si $|\Gamma| \ll K$ alors ou bien $\Gamma \frac{\nu \sin^2 \Phi_{2n_0}}{\Gamma^{[1/\varepsilon]}}$ est limité, ou bien $\Gamma \frac{\nu \sin^2 \Phi_{2n_0}}{\Gamma^{[1/\varepsilon]}}$ est infiniment grand et du signe de ν . Dans ce dernier cas, comme Φ est infiniment proche de Φ_{2n_0} , $\cos(\Phi - \Phi_{2n_0})$ est proche de 1 et donc positif. on en déduit que ou bien Γ' est limité, ou bien Γ' est infiniment grand du signe de ν . Ceci nous assure que les solutions de la bande $] -K, K[$ ne peuvent pas remonter le courant dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.

Si v entre dans le halo de $v = 0$ en t_0 compris entre $-c_\nu$ et c_ν , il entre dans la bande $|W| < 1$ en t_0 et suit une courbe de type $W = C.e^{t^2}$ jusqu'en $-t_0$ où il sort du halo.

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

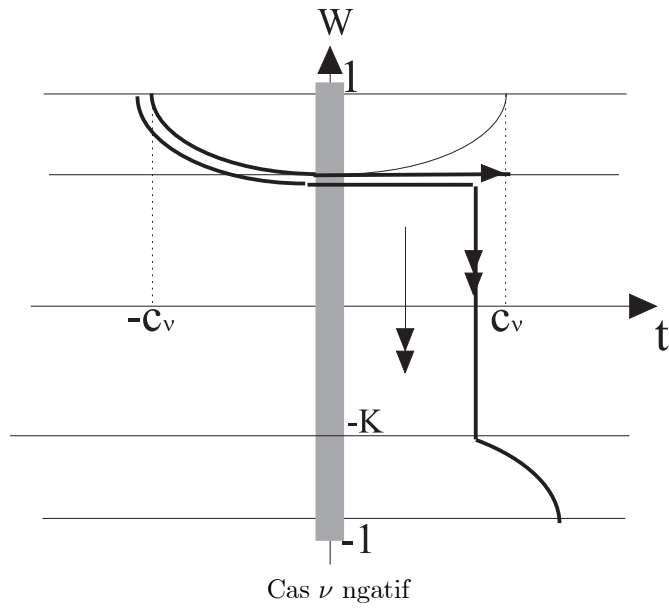
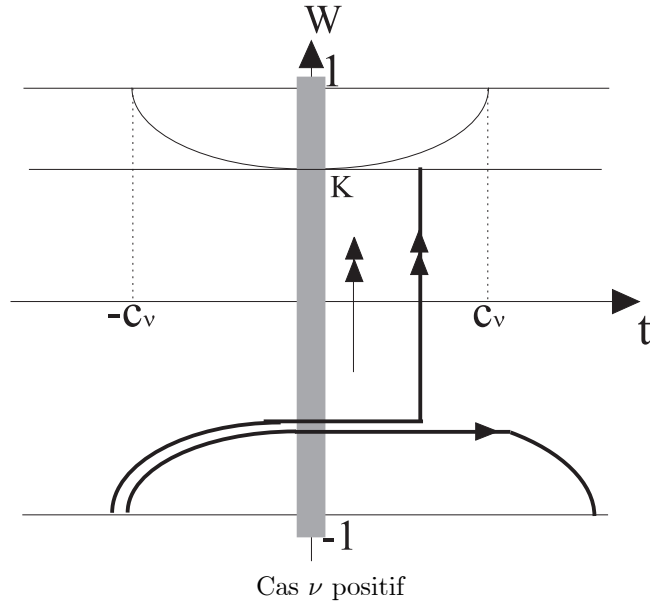
Si v entre dans le halo de $v = 0$ en $t_0 \ll -c_\nu$ alors le W correspondant suit une courbe $W = C.e^{t^2}$ jusqu'à atteindre la valeur K puis va très vite longer une des séparatrices $W = \pm K$ (selon le signe de ν) jusqu'à l'origine puis longer une exponentielle qui la fera sortir du halo infiniment proche de c_ν .

Le fait que par exemple pour ν positif la solution va longer la séparatrice $W = +K$ provient du fait que pour ν positif et t appréciable négatif la dérivée reste appréciable positive près de la séparatrice $W = -K$.



CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Le même phénomène se produit mais dans l'autre sens si v sort du halo de $v = 0$ en $t_0 \gg c_\nu$.

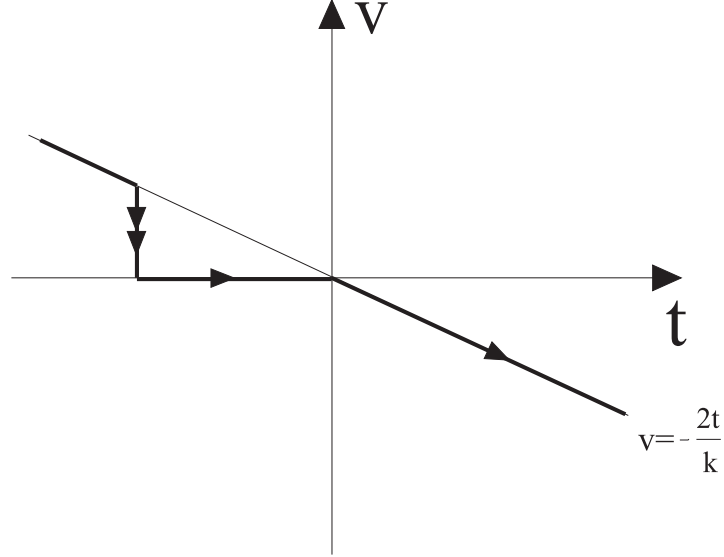


■

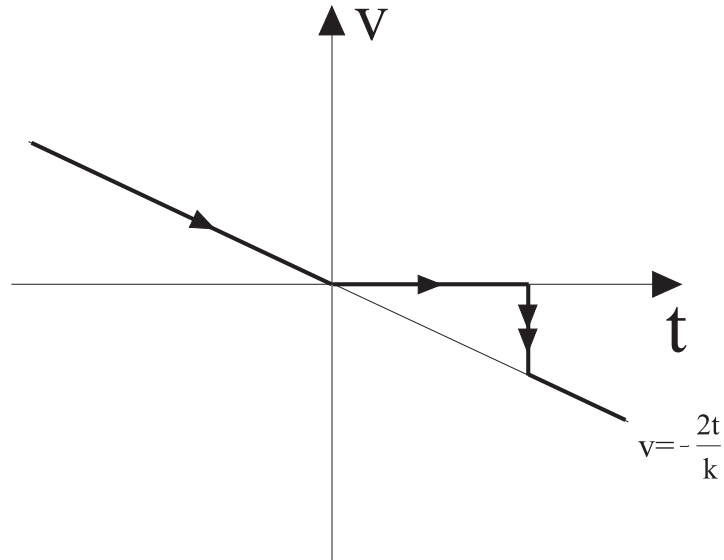
Théorème 4.2.9 (*feuilletage normal*) On suppose k positif. Soit n_0 l'entier naturel le plus proche de $k/2$. Soit $\nu = k - 2n_0$. Soit v solution généralisée de (4.8). Si $|\nu|^\varepsilon$ est infiniment proche de 1, alors

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

1. v ne peut être infiniment petite pendant des temps appréciables des deux côtés de l'origine.
2. Si l'ombre de v ne contient pas la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t < 0)$, alors elle contient la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t > 0)$.



3. Si l'ombre de v ne contient pas la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t > 0)$, alors elle contient la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t < 0)$.



4. Si l'ombre de v ne contient pas toute la droite $v = -\frac{2t}{k}$, alors v a $[\frac{k}{2}]$ pôles.

Preuve. Soient α et β définis par $\frac{k}{2} = n_0 + \alpha = n_0 + 1 - \beta$. Par hypothèse $\alpha^\varepsilon \simeq 1$ et $\beta^\varepsilon \simeq 1$.

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Supposons qu'il existe un canard pour le paramètre k . Alors la solution généralisée qui longe $v = 0$ pour tous les $t < 0$ est un canard et elle longe $v = 0$ jusqu'à des t positifs appréciables. Soit $\widehat{v}_k$ cette solution. Soit t_0 positif appréciable tel que $\widehat{v}_k(t_0)$ soit encore infiniment petit. Soit $\nu > 0$ tel que $\nu^\varepsilon \ll 1$ et $(-\varepsilon \ln \nu) \ll t_0^2$.

Soit T_0 infiniment grand négatif. Soient $\widehat{v}_1$ et $\widehat{v}_2$ solutions généralisées de paramètres respectifs $2n_0 + \nu$ et $2n_0 + 2 - \nu$ telles que $\widehat{v}_1(T_0) = \widehat{v}_2(T_0) = \widehat{v}_k(T_0)$. $\widehat{v}_1$ et $\widehat{v}_2$ longent $v = 0$ jusqu'en $c_\nu \ll t_0$ puis sortent du halo de $v = 0$. Donc $\widehat{v}_1(t_0)$ et $\widehat{v}_2(t_0)$ ne sont pas infiniment petits. De plus $\widehat{v}_1$ et $\widehat{v}_2$ ont le même nombre de pôles entre T_0 et t_0 . ($\widehat{v}_1$ a n_0 pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 et un pôle en c_ν alors que $\widehat{v}_2$ a $n_0 + 1$ pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0).

Pour étudier ces trois solutions généralisées nous allons revenir au cylindre. Soient Φ_1 , Φ_2 et Φ_k les solutions correspondantes. Afin d'éclaircir ce qui se passe nous allons dérouler le cylindre sur un plan.

Dans le plan (t, φ) on définit le champ de vecteur de paramètre k par

$$\varepsilon \varphi' = 2t \sin \varphi \cos \varphi - k \sin^2 \varphi + \varepsilon \cos^2 \varphi$$

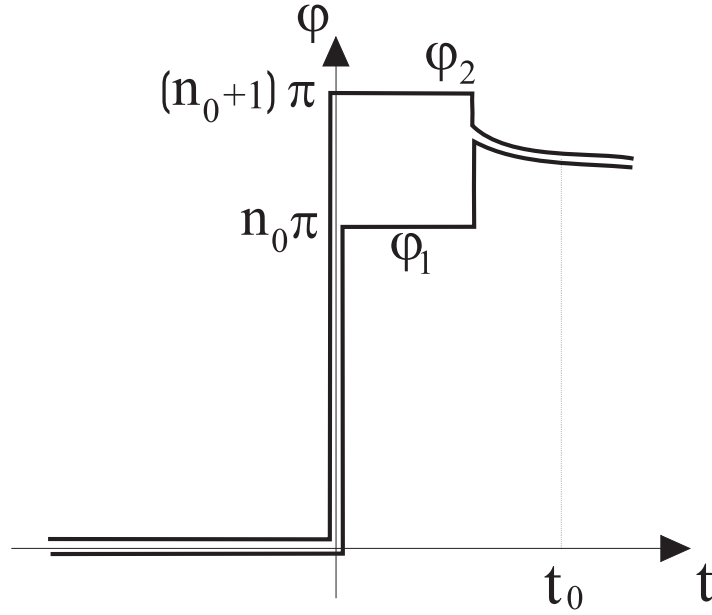
Soit φ_k fonction continue telle que $\varphi_k(t) = \Phi_k(t) \bmod \pi$ pour tout t réel et telle que $\varphi_k(T_0) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De même on définit φ_1 et φ_2 . Par construction φ_k est une ligne du champ de paramètre k , φ_1 pour le paramètre $2n_0 + \nu$ et φ_2 pour le paramètre $2n_0 + 2 - \nu$. De plus $\varphi_k(T_0) = \varphi_1(T_0) = \varphi_2(T_0)$.

Pour tout t réel on a

$$2t \sin \varphi \cos \varphi + k \sin^2 \varphi + \varepsilon \cos^2 \varphi \geq 2t \sin \varphi \cos \varphi + (2n_0 + \nu) \sin^2 \varphi + \varepsilon \cos^2 \varphi$$

On en déduit que pour tout t supérieur à T_0 $\varphi_k(t) \geq \varphi_1(t)$. De même pour tout t supérieur à T_0 $\varphi_2(t) \geq \varphi_k(t)$.

Or comme $\widehat{v}_1$ et $\widehat{v}_2$ ont même nombre de pôles et sont infiniment proches en t_0 on a $\varphi_1(t_0) \simeq \varphi_2(t_0)$. Et avec les inégalités qui précèdent, $\varphi_k(t_0) \simeq \varphi_1(t_0)$.



Ce qui montre que $\widehat{v}_k(t_0)$ n'est pas infiniment petit. Il y a donc contradiction. ■

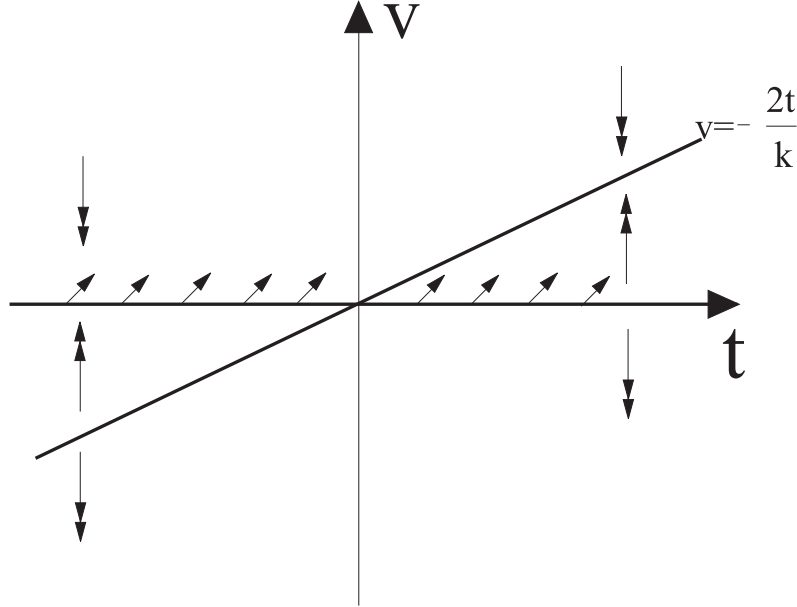
Proposition 4.2.10 *Si k est négatif alors*

1. *v ne peut être infiniment petite pendant des temps appréciables des deux côtés de l'origine.*
2. *Si l'ombre de v ne contient pas la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t < 0)$, alors elle contient la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t > 0)$.*
3. *Si l'ombre de v ne contient pas la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t > 0)$, alors elle contient la demi-droite $(v = -\frac{2t}{k}, t < 0)$.*

Preuve. Pour démontrer ce théorème il nous faut montrer que lorsque k est négatif, l'équation (4.8) n'admet pas de canards.

Dans un premier temps nous allons montrer que si l'équation admet des canards, ceux-ci n'ont pas de pôles.

Pour ceci il suffit de remarquer que pour $v = 0$ on a $v' = 1$ et que v' est supérieur à 1 si v est petit négatif. Donc si v_0 est un canard de taille $(-c, d)$, pour $-c < t < 0$ on a $v(t) > 0$. La droite $v = 0$ constitue alors un piège pour v_0 qui ne peut pas non plus partir vers le haut en raison du mouvement rapide dirigé vers le bas. La solution canard v_0 ne peut donc avoir de pôles.



Comme n'a pas de pôles, il peut être développé en ε -ombres :

$$v_0 = \sum_{n \geq 1} v_n \varepsilon^n$$

A l'ordre 1 l'équation nous donnerait alors $0 = 1 + 2tv_1 + 0$ c'est à dire $v_1 = -\frac{1}{2t}$ qui n'est pas continue en 0.

Donc (4.8) n'admet pas de canards. ■

4.2.3 Résonance et canards

Nous ne considérerons ici que des valeurs standard de k . Les valeurs non standard seront incluses dans la partie suivant, l'étude générale.

cas résonnant

Dans cette partie, en utilisant les résultats qui précèdent nous allons montrer le théorème suivant:

Théorème 4.2.11 *Soit k un entier naturel pair. Soit u la solution de l'équation (4.5) vérifiant le problème aux limites (4.6). Soit $u_L(t) = -At^{-\frac{k}{2}}$ la solution de l'équation réduite*

$$2tu' + ku = 0 \quad (4.9)$$

vérifiant $u_L(-1) = A$ et définie pour t strictement négatif et soit $u_R(t) = Bt^{-\frac{k}{2}}$ la solution de (4.9) vérifiant $u_R(1) = B$ et définie pour t strictement positif.

Si k est un multiple de 4 et A est différent de B alors pour tout t de $] -1, 0[$, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = (A - B)\infty$ et pour tout t de $]0, 1[$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = (B - A)\infty$.

Si k n'est pas un multiple de 4 et $(A + B)$ est non nul alors pour tout t de $] -1, 1[\setminus \{0\}$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = (A + B)\infty$.

Si k est un multiple de 4 et $A = B$ ou si k n'est pas un multiple de 4 et $A = -B$ alors pour tout t de $[-1, 0[$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = u_L(t)$ et pour tout t de $]0, 1]$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = u_R(t)$.

Lemme 4.2.12 *Si u est solution de (4.5), alors ses parties paires et impaires sont aussi solutions de (4.5).*

Comme dans le cas de l'équation (4.1) ce résultat se déduit du fait que si u est solution $t \mapsto u(-t)$ l'est aussi.

Soit u_p la solution de (4.5) telle que $u_p(-1) = 1 = u_p(1)$ et u_i la solution de (4.5) telle que $u_i(-1) = -1$ et $u_i(1) = 1$. (On définit également les fonctions v_p, φ_p, v_i et φ_i correspondantes) D'après le lemme précédent u_p est paire et u_i est impaire. De plus la linéarité de (4.5) montre que la solution du problème aux limites (4.6) est donnée par $u = \frac{A+B}{2}u_p + \frac{B-A}{2}u_i$. Pour trouver le comportement de toute solution d'un problème aux limites il nous suffira donc de connaître ceux de u_p et u_i .

Lemme 4.2.13 *Si k est un multiple de 4 alors $u_i = \frac{u_k}{u_k(1)}$. Si k n'est pas un multiple de 4 alors $u_p = \frac{u_k}{u_k(1)}$.*

Preuve. Nous avons vu que $u_k = e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}} P_k(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})$. Comme $e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}}$ est paire, la parité de u_k est la même que celle de P_k . Or P_k étant un polynôme de Hermite de degré $\frac{k-2}{2}$, sa parité est celle de $\frac{k-2}{2}$. Ainsi, si k est un multiple de 4, comme $\frac{k-2}{2}$ est impair, P_k et donc u_k sont impairs. $\frac{u_k}{u_k(1)}$ est donc une solution impaire de (4.5) valant 1 en $t = 1$. On a donc $u_i = \frac{u_k}{u_k(1)}$.

De même lorsque k n'est pas un multiple de 4, $\frac{k-2}{2}$ est pair et on obtient $u_p = \frac{u_k}{u_k(1)}$. ■

Lemme 4.2.14 *Soit t_0 appréciable positif. Soit v solution de (4.8) telle que $v(t) \simeq 0$ pour tout t de $]0, t_0[$, t non infiniment petit. Alors pour tout t non infiniment proche de t_0 et 0 dans $]0, t_0[$ on a $v(t) < 0$.*

Preuve. Dans l'équation (4.8) on voit que si $v(t)$ est positif alors $v'(t)$ est supérieur à 1. Ainsi si v prenait une valeur positive ou nulle en un t_1 inférieur à t_0 et non infiniment proche de t_0 , comme v devrait à partir de t_1 rester au dessus de la droite de pente 1 passant par le point $(t_1, v(t_1))$, v prendrait des valeurs appréciables pour tout les t supérieurs à t_1 non infiniment proches de t_1 . Comme il existe nécessairement un tel t entre t_1 et t_0 v ne resterait pas infiniment petite jusqu'en t_0 . ■

Nous pouvons maintenant prouver le théorème.

Preuve. Nous allons supposer que k n'est pas un multiple de 4. (La même méthode fonctionne dans le cas multiple de 4).

Nous savons alors que $u_p = \frac{u_k}{u_k(1)}$. On en déduit que $v_p = v_k$ et donc que v_p est infiniment petite pour tous les t appréciables positif. Nous avons donc également v_p strictement négatif pour tous les t appréciables positifs.

Par intégration on a $u_p(t) = e^{-\int_t^1 \frac{1}{v_p(s)} ds}$. Comme pour tout t appréciable positif $\frac{1}{v_p(s)}$ est infiniment grand négatif on a pour tout t de $]0, 1[$, t non infiniment proche de 0 et de 1, $-\int_t^1 \frac{1}{v_p(s)} ds$ infiniment grand positif. Il en est donc de même pour u_p . Par parité on en déduit que u_p est infiniment grand positif pour tous les t de $] -1, 1[$ non infiniment proches de -1 , 1 et 0.

Il nous reste à déterminer le comportement de u_i .

Si v_i devenait infiniment petit en un t appréciable négatif ce serait un canard et on aurait $\varphi_i(0) \simeq \varphi_k(0)$ (d'après le théorème 4.2.7).

Comme u_i est impaire, $v_i(0)$ est nul. Donc $\varphi_i(0) = 0$. Comme u_p est paire, $v_p(0)$ est infini et donc $\varphi_p(0) = \frac{\pi}{2}$. Or $\varphi_p = \varphi_k$. On a donc $\varphi_k(0) = \frac{\pi}{2}$ qui ne peut être infiniment proche de $\varphi_i(0)$. Donc v_i ne devient pas infiniment petit en un t appréciable négatif et pour tout t appréciable négatif on a $v_i(t) \simeq -\frac{2t}{k}$. Par intégration on obtient pour $t \in [-1, 0[$, t non infiniment petit, $u_i(t) \simeq C|t|^{-\frac{k}{2}}$. En utilisant le fait que u_i est impaire et vaut 1 en 1 on obtient que pour tout t de $[-1, 1]$, t non infiniment petit, $u_i(t) \simeq t|t|^{-\frac{k}{2}-1}$.

Si $(A + B)$ est non nul, alors le comportement de la solution du problème aux limites est donné par celui de $\frac{A+B}{2}u_p$ qui est infiniment grand du signe de $(A + B)$. Si $(A + B)$ est nul on a $u = u_i$, ce qui donne pour tout t non nul, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = \frac{B-A}{2}t|t|^{-\frac{k}{2}-1}$ qui est égal à $-At^{-\frac{k}{2}}$ si t est négatif et qui est égal à $Bt^{-\frac{k}{2}}$ si t est positif. ■

cas non résonnant

Théorème 4.2.15 *Si k n'est pas un entier pair et u est la solution de (4.5) vérifiant les conditions aux limites (4.6), alors pour tout t de $[-1, 0[$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = u_L(t)$ et pour tout t de $]0, 1]$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = u_R(t)$*

Avec $u_L(t) = -At^{-\frac{k}{2}}$ la solution de l'équation réduite (4.9) vérifiant $u_L(-1) = A$ et définie pour t strictement négatif et avec $u_R(t) = Bt^{-\frac{k}{2}}$ la solution de (4.9) vérifiant $u_R(1) = B$ et définie pour t strictement positif.

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Preuve. k étant standard nous nous trouvons dans le cas du feuilletage normal. Comme dans le cas résonnant nous allons utiliser les fonctions u_p et u_i . Par construction u_p est paire et u_i est impaire. On en déduit que v_p et v_i sont impaires. Si v_p ou v_i était infiniment petite pendant un temps appréciable pour les t négatifs par imparité elle le serait également pendant un temps appréciable pour des t positifs (et vice-versa). Or d'après les hypothèses sur k ceci est impossible. On en déduit que pour tous les t non infiniment petits v_i et v_p sont infiniment proches de $-\frac{2t}{k}$. Il suffit alors d'intégrer pour obtenir que pour t dans $[-1, 1]$ non infiniment proche de 0 on a $u_p(t) \simeq |t|^{-\frac{k}{2}}$ et $u_i(t) \simeq t|t|^{-\frac{k}{2}-1}$. On obtient alors pour tout t non nul $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = \frac{A+B}{2} |t|^{-\frac{k}{2}} + \frac{B-A}{2} t |t|^{-\frac{k}{2}-1}$, ce qui donne le résultat annoncé. ■

Part II

Equation générale

CHAPITRE 4 : METHODE GEOMETRIQUE

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la généralisation de l'étude de la partie précédente. Nous allons étudier les problèmes aux limites du type $u(-c) = A$, $u(d) = B$ pour l'équation

$$\varepsilon u'' + f(t)u' + g(t, a) = 0$$

Deux cas peuvent se produire. Si $f'(0)$ est positif nous sommes face au phénomène de résonance de Ackerberg et O'Malley. Si $f'(0)$ est négatif il s'agit du second type de résonance déjà rencontré dans la première partie. C'est principalement à ce second cas que nous allons nous intéresser.

La méthode que nous allons employer ici est celle déjà utilisée par Callot dans le cas de la résonance de Ackerberg et O'Malley et nous commencerons dans un premier chapitre par rappeler certains de ses résultats sans faire de démonstration. Dans le chapitre suivant nous étudierons le second phénomène de résonance en passant par l'étude de l'équation de Riccati, ce qui nous permettra de détailler les démonstrations de même type que celles de Callot, utilisant le cas particulier étudié dans la première partie comme modèle local du cas général.

Chapter 5

La résonance de Ackerberg et O'Malley

Dans ce chapitre nous nous contenterons de donner les résultats de Callot qui se trouvent plus largement expliqués dans [6].

J-L. Callot s'intéresse à l'équation

$$\varepsilon u'' - f(t)u' + g(t, a)u = 0 \quad (5.1)$$

Avec ε un réel infiniment petit positif, a un paramètre réel, f et g deux fonctions réelles presque standard. De plus $f(0) = 0$, $f'(0)$ est appréciable positif g est appréciable positive. Nous supposons également que si t n'est pas infiniment petit, $f(t)$ est appréciable.

Il introduit alors le changement de variable $v = \frac{u}{u'}$ l'équation (5.1) devient

$$\varepsilon v' = -f(t)v + g(t, a)v^2 + \varepsilon \quad (5.2)$$

Cette équation de type Riccati définit dans le plan (t, v) un champ lent-rapide dont la variété lente est constituée de la droite $(v = 0)$ et de la courbe d'équation $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t, a)} \right))$. La droite $(v = 0)$ est répulsive pour les t négatifs et attractive pour les t positifs alors que la courbe $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t, a)} \right))$ est attractive pour les t négatifs et répulsive pour les t positifs.

Comme dans les cas les plus simples déjà étudiés dans la première partie, si u est une solution de (5.1) alors la fonction $v = \frac{u}{u'}$ n'a que des pôles simples. C'est pourquoi nous ferons l'étude des solutions généralisées de (5.2).

Définition 5.0.16 Soient c et d deux réels standards strictement positifs. Une solution généralisée v de (5.2) sera appelée canard de taille $(-c, d)$ si :

1. Pour tout t appréciablement inférieur à $-c$ on a $v(t) \simeq 0$.
2. L'ombre du graphe de v contient le segment de la courbe $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t, a)} \right))$ pour $t \in]-c, d[$.
3. Pour tout t appréciablement supérieur à d on a $v(t) \simeq 0$.

Définition 5.0.17 Soit v une solution généralisée de (5.2). On dira que v est un grand canard de (5.2) si pour tout t limité non infiniment petit $v(t) \simeq \frac{f(t)}{g(t,a)}$.

Théorème 5.0.18 Pour que l'équation (5.2) admette un canard il faut que $\circ \left(\frac{g(0,a)}{f'(0)} \right)$ soit un entier naturel.

Théorème 5.0.19 Si $\circ \left(\frac{g(0,a_0)}{f'(0)} \right)$ est un entier naturel et si $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ n'est pas infiniment petit, alors pour tout couple de réels positifs standards c, d il existe a infiniment proche de a_0 tel que l'équation (5.2) admet un canard de taille $(-c, d)$.

Théorème 5.0.20 Soit a_0 tel que (5.2) possède un grand canard. On suppose de plus que $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ n'est pas infiniment petit. Alors

1. Pour $a = a_0$ l'équation (5.2) définit un feuilletage à canards dont la taille est donnée par une involution Φ : si un canard est de taille $(-c, d)$ alors on a $d = \Phi(-c)$. L'involution Φ est définie par $\int_t^{\Phi(t)} \circ f(\tau) d\tau = 0$
2. Si $|a - a_0|^\varepsilon$ est inférieur à 1 et non infiniment proche de 1, alors (5.2) définit un feuilletage mixte: si c_i et c_s sont définis par

$$\int_{c_i}^0 \circ f(\tau) d\tau = \int_0^{c_s} \circ f(\tau) d\tau = -\circ(\varepsilon \ln |a - a_0|)$$

alors

- (a) Une solution qui entre dans le halo de $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t,a)} \right))$ entre c_i et 0 est un canard dont la taille est donnée par l'involution Φ précédemment définie.
- (b) Une solution qui entre dans le halo de $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t,a)} \right))$ avant c_i sort du halo de $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t,a)} \right))$ en c_s .
- (c) Une solution qui sort du halo de $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t,a)} \right))$ après c_s est entrée dans le halo de $(v = \circ \left(\frac{f(t)}{g(t,a)} \right))$ en c_i .
3. Si a est infiniment proche de a_0 et $|a - a_0|^\varepsilon$ est infiniment proche de 1, alors (5.2) ne possède pas de solution canard.

Nous allons maintenant nous placer dans le cas où la condition $|a - a_0|^\varepsilon << 0$ est vérifiée et soit $n = \circ \left(\frac{g(0,a)}{f'(0)} \right)$. Soit G une solution de l'équation réduite

$$-\circ f(t)u' + \circ g(t, a)u = 0$$

telle que $\frac{G(t)}{t^n} \simeq 1$ si $t \simeq 0$ et $t \neq 0$ et soit F une primitive de f .

Théorème 5.0.21 Soit v solution canard de (5.2) telle que

$$v(t) \simeq \frac{f(t)}{g(t,a)} \text{ pour } -c << t << 0 \text{ et } 0 << t << d$$

CHAPITRE 5 : LA RESONANCE DE ACKERBERG ET O'MALLEY

$v(t) \simeq 0$ pour $t \ll -c$ et $t \gg d$.

Les solutions $u(t)$ de (5.1) dont elle est issue sont de la forme:

$$u(t) = K \left(G(t) + \eta(t) + (-1)^{k_1} \exp \frac{F(t) - F(-c) + \eta_1(t)}{\varepsilon} \right) \text{ pour } t \leq 0$$

$$u(t) = K \left(G(t) + \tilde{\eta}(t) + (-1)^{k_2} \exp \frac{F(t) - F(d) + \eta_2(t)}{\varepsilon} \right) \text{ pour } t \geq 0$$

avec $\eta, \tilde{\eta}, \eta_1$ et η_2 des fonctions infiniment petites pour t limité. Le réel k_1 est égal à l'ombre de $\left(\frac{g(0,a)}{f'(0)} \right)$ augmentée du nombre de pôles de v dans le halo de $-c$ et le réel k_2 est égal au nombre de pôles de v dans le halo de d .

La méthode de démonstration consiste à intégrer des deux côtés de l'origine, ce qui donne deux valeurs de K puis montrer que ces valeurs sont égales. Ceci se fait en utilisant une loupe de puissance $\sqrt{\varepsilon}$. Les détails de cette démonstration se trouvent dans [6].

On voit donc que pour $-c \ll t \ll d$ la solution u est infiniment proche de KG , c'est à dire d'une solution de l'équation réduite..

Nous allons maintenant nous intéresser à la solution u_0 de (5.1) vérifiant le problème aux limites $u_0(-c) = A$ et $u_0(d) = B$ avec c, d, A et B limités.

On suppose de plus que le paramètre a est choisi de telle sorte qu'il y ait des canards pour l'équation (5.2) et que l'on ait $c_i \ll -c \ll d \ll c_s$. Le théorème précédent nous montre qu'il y a deux types de solutions de (5.1) vérifiant $u_0(-c) = A$. Si $\bar{c}$ est tel que $\int_{-c}^{\bar{c}} f(t)dt = 0$, soit u_0 a une couche limite en $-c$ et donc une deuxième en $\bar{c}$, soit elle n'a pas de couche limite en $-c$ et en a une au-delà de $\bar{c}$.

Si $d \gg \bar{c}$, ce qui précède nous montre que u_0 ne peut pas avoir de couche limite en $-c$. En effet, comme la deuxième couche limite se situerait alors en $\bar{c}$, $u_0(d)$ ne pourrait être limité. On en déduit que sauf dans le cas où $\frac{A}{G(-c)} \simeq \frac{B}{G(d)}$, la solution u_0 a une couche limite en b .

Si $d \ll \bar{c}$, la solution u_0 doit avoir une couche limite en $-c$, sauf si $\frac{A}{G(-c)} \simeq \frac{B}{G(d)}$.

Théorème 5.0.22 Soit u_0 solution de (5.1) vérifiant $u_0(-c) = A$ et $u_0(d) = B$ avec c, d, A, B réels limités, c et d strictements positifs. On suppose que $c_i \ll -c \ll d \ll c_s$. Soit $\bar{c}$ tel que $\int_{-c}^{\bar{c}} f(t)dt = 0$.

Alors pour les t tels que $-c \ll t \ll d$, u_0 est proportionnelle à G

Si $d \gg \bar{c}$, u_0 a une couche limite en d sauf si $\frac{A}{G(-c)} \simeq \frac{B}{G(d)}$ et pas de couche limite en $-c$.

Si $d \ll \bar{c}$, u_0 a une couche limite en $-c$ sauf si $\frac{A}{G(-c)} \simeq \frac{B}{G(d)}$ et pas de couche limite en d .

Chapter 6

L'équation

$$\varepsilon u'' + f(t, \varepsilon)u' + g(t, a)u = 0$$

Dans la suite de cette partie nous allons nous intéresser aux problèmes aux limites du type $u(-c) = A$, $u(d) = B$ pour l'équation

$$\varepsilon u'' + f(t)u' + g(t, a)u = 0 \quad (6.1)$$

Avec ε un réel infiniment petit positif et a un paramètre réel. Nous supposons que f et g sont presque standards. De plus $f(0) = 0$, $f'(0)$ est appréciable positif et pour tout couple (t, a) , $g(t, a)$ est appréciable (pour un a donné, $t \mapsto g(t, a)$ est donc de signe constant). Nous supposons également que si t n'est pas infiniment petit, $f(t)$ est appréciable.

Remarque 6.0.23 *Il est à noter que le changement d'inconnue*

$$y(t) = u(t) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f(\tau) d\tau$$

permet de passer de (6.1) à

$$\varepsilon y'' - f(t)y' + (g(t, a) - f'(t))y = 0 \quad (6.2)$$

qui est elle du type Ackerberg et O'Malley. Mais un problème aux limites du type

$$u(-c) = A, u(d) = B$$

devient alors

$$y(-c) = A \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{-c} f(\tau) d\tau, y(d) = B \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^d f(\tau) d\tau$$

et $y(-c)$ et $y(d)$ tendent tous deux vers l'infini. De plus on a

$$u(t) = y(t)h(t)$$

avec

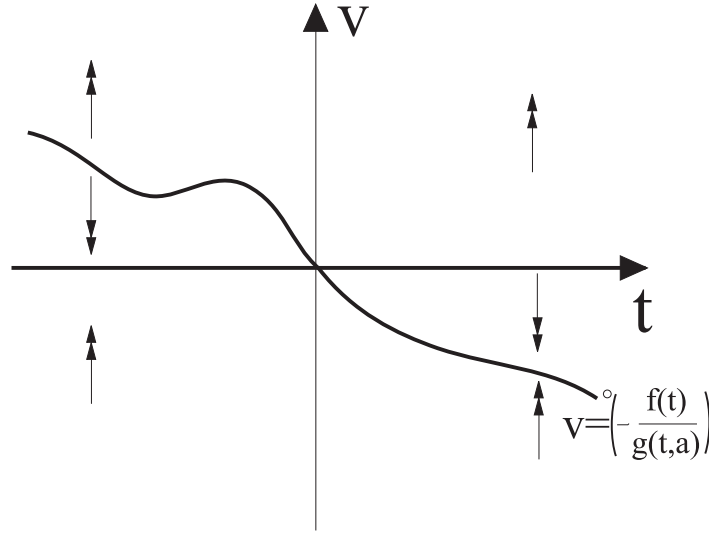
$$h(t) = \exp -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f(\tau) d\tau$$

qui tend vers 0 pour tout t non nul. Le changement d'inconnue ne nous permet donc pas de donner directement le comportement de la solution d'un problème aux limites de (6.1) à partir d'une solution d'un problème aux limites de (6.2).

Par le changement d'inconnue $v = \frac{u}{u'}$ l'équation (6.1) devient

$$\varepsilon v' = f(t)v + g(t, a)v^2 + \varepsilon \quad (6.3)$$

Cette équation de type Riccati définit dans le plan (t, v) un champ lent-rapide dont la variété lente est constituée de la droite $(v = 0)$ et de la courbe d'équation $(v = \circ \left(\frac{-f(t)}{g(t, a)} \right))$. La droite $(v = 0)$ est attractive pour les t négatifs et répulsive pour les t positifs alors que la courbe $(v = \circ \left(\frac{-f(t)}{g(t, a)} \right))$ est répulsive pour les t négatifs et attractive pour les t positifs.



Les mêmes remarques que dans la partie précédente nous amèneront à considérer l'équation (6.3) comme étant celle d'un champ de vecteurs sur le cylindre vu à travers une carte particulière. Nous étudierons donc ici les solutions généralisées de l'équation, c'est à dire les fonctions n'ayant que des pôles simples et qui sont solutions de (6.3) entre deux pôles successifs.

Définition 6.0.24 Soient c et d deux réels standard strictement positifs. Une solution généralisée v de (6.3) sera appelée canard de taille $(-c, d)$ si :

1. Pour tout t appréciablement inférieur à $-c$ on a $v(t) \simeq \frac{-f(t)}{g(t, a)}$
2. Pour tout t de $] -c, d[$, t non infiniment proche de $-c$, d et 0 on a $v(t) \simeq 0$
3. Pour tout t appréciablement supérieur à d on a $v(t) \simeq \frac{-f(t)}{g(t, a)}$

Définition 6.0.25 Soit v une solution généralisée de (6.3). On dira que v est un grand canard de (6.3) si pour tout t limité non infiniment petit on a $v(t) \simeq 0$.

6.1 Etude de l'équation de Riccati

Dans un premier temps nous allons donner une condition nécessaire à l'existence de canards.

Théorème 6.1.1 *Pour que l'équation (6.3) admette un canard il faut que $\circ \left(\frac{g(0, a)}{f'(0)} \right)$ soit un entier naturel.*

Preuve. Supposons qu'il existe c et d positifs standards tels que (6.3) ait un canard de taille $(-c, d)$. Soit v_0 un tel canard.

Pour tout η positif on pose le changement d'échelle

$$\begin{cases} t = \eta T \\ v = \eta V \end{cases}$$

et on notera V_0 l'image de v_0 par cette loupe.

Soit w réel tel que $0 \ll w \ll \frac{f'(0)}{g(0, a)}$.

Comme v_0 est un canard, pour tout $t \in]-c, 0[$, t non infiniment proche de 0 et $-c$ on a $v_0(t) \simeq 0$. On en déduit que pour ces mêmes t $\frac{v_0(t)}{t}$ est infiniment petit. Nous allons maintenant montrer que ceci reste vrai pour les valeurs de t infiniment petites extérieures à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0.

Supposons par l'absurde qu'il existe un t négatif hors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 tel que $\left| \frac{v_0(t)}{t} \right| \geq w$. On prend alors η le plus grand en valeur absolue de ces t . C'est à dire :

$$-\eta = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t < 0 \text{ et } \left| \frac{v_0(t)}{t} \right| = w \right\}$$

et soit $\delta \in \{-1, 1\}$ tel que $\delta \frac{v_0(-\eta)}{-\eta} = w$.

Comme w est appréciable et que si $t \ll 0$ et a $\frac{v_0(t)}{t}$ infiniment petit, nécessairement η est infiniment petit. De plus, d'après notre hypothèse, η n'est pas dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 et donc $\frac{\varepsilon}{\eta^2}$ est infiniment petit.

Sous la loupe de puissance η , l'équation (6.3) devient

$$\frac{\varepsilon}{\eta^2} \frac{dV}{dT} = \frac{f(\eta T)}{\eta} V + g(\eta T, a) V^2 + \frac{\varepsilon}{\eta^2} \quad (6.4)$$

C'est un champ lent-rapide et on a $V_0(-1) = -\delta w$.

Dans (6.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\eta^2} \frac{dV_0}{dT} \Big|_{T=-1} &= -\frac{f(-\eta)}{\eta} \delta w + g(-\eta, a) w^2 + \frac{\varepsilon}{\eta^2} \\ &\simeq -\delta w g(0, a) \left[\frac{-f'(0)}{g(0, a)} - \delta w \right] \end{aligned}$$

Le terme entre crochets étant appréciable négatif, on en déduit que $\frac{dV_0}{dT} \Big|_{T=-1}$ est infiniment grand et du signe de δ .

Comme

$$\frac{d\left(\frac{V}{T}\right)}{dT} = \frac{1}{T} \frac{dV}{dT} - \frac{V}{T^2}$$

on en déduit que $\frac{d\left(\frac{V_0}{T}\right)}{dT} \Big|_{T=-1}$ est non nul et du signe opposé à δ . Ce qui montre que $\delta \frac{V_0}{T}$ est strictement décroissante en $T = -1$ et en revenant aux variables

(v, t) que $\delta \frac{v_0}{t}$ est strictement décroissante en $t = -\eta$, ce qui contredit la définition de η . On a donc

$$\forall t < 0, t \notin \sqrt{\varepsilon} - gal(0) \quad \left| \frac{v_0(t)}{t} \right| \leq w$$

Par permanence on en déduit qu'il existe $t_0 \in \sqrt{\varepsilon} - gal(0)$ tel que si $-c \ll t < t_0$, alors $|v_0(t)| \leq -tw$.

Nous allons maintenant observer la solution v_0 sous la loupe de puissance $\sqrt{\varepsilon}$. Soit $T_0 = t_0/\sqrt{\varepsilon}$ l'image de t_0 par cette loupe. L'inégalité précédente nous montre que pour T limité inférieur à T_0 on a

$$|V_0(T)| \leq -Tw$$

On en déduit que V_0 ne peut avoir la droite $(V = -T \frac{f'(0)}{g(0,a)})$ comme asymptote en $-\infty$. On montrerait de même que V_0 ne peut avoir cette droite comme asymptote en $+\infty$.

Or V_0 est solution de

$$\frac{dV}{dT} = Tf'(0)(1 + \alpha)V + g(0, a)(1 + \beta)V^2 + 1 \quad (6.5)$$

avec α et β infiniment petits.

L'équation (6.5) est presque-standard. D'après le lemme de l'ombre courte, V_0 est approchée par une solution $\tilde{V}_0$ de

$$\frac{dV}{dT} = Tf'(0)V + {}^\circ(g(0, a))V^2 + 1 \quad (6.6)$$

qui dans les variables (t, v) initiales vérifie alors

$$\tilde{\varepsilon}v' = 2tv + 2{}^\circ\left(\frac{g(0, a)}{f'(0)}\right)v^2 + \tilde{\varepsilon}$$

avec $\tilde{\varepsilon} = 2\varepsilon/f'(0)$ infiniment petit. On peut y appliquer les résultats de la partie précédente: si ${}^\circ\left(\frac{g(0, a)}{f'(0)}\right)$ n'est pas un entier naturel il n'y a pas de canard et v est infiniment proche (la distance étant d'ordre ε) de $\frac{-t}{{}^\circ\left(\frac{g(0, a)}{f'(0)}\right)}$ soit pour tous les t positifs hors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0, soit pour tous les t négatifs hors de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. Ceci implique que si ${}^\circ\left(\frac{g(0, a)}{f'(0)}\right)$ n'est pas un entier naturel $\tilde{V}_0$ doit avoir la droite $(V = -T \frac{f'(0)}{g(0, a)})$ comme asymptote, ce qui n'est pas. Donc ${}^\circ\left(\frac{g(0, a)}{f'(0)}\right) \in \mathbb{N}$. ■

Nous allons maintenant montrer que cette condition nécessaire est presque suffisante: pour toute valeur du paramètre a telles que cette condition est vérifiée il existe une valeur infiniment proche pour le paramètre telle que l'équation admette des canards.

Théorème 6.1.2 *Si ${}^\circ\left(\frac{g(0, a_0)}{f'(0)}\right)$ est un entier naturel et si $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ n'est pas infiniment petit, alors pour tout couple de réels positifs standards c, d il existe a infiniment proche de a_0 tel que l'équation (6.3) admet un canard de taille $(-c, d)$.*

Preuve. Soit $n = \circ \left(\frac{g(0, a_0)}{f'(0)} \right)$ et on supposera par exemple que $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ est appréciable positif.

De plus dans cette démonstration on ne considérera que des valeurs du paramètre a assez proches de a_0 pour que l'on ait toujours $n - 1/2 < \frac{g(0, a)}{f'(0)} < n + 1/2$.

Soit v_a solution de (6.3) telle que $v_a(-c) = -\frac{1}{2} \frac{f(-c)}{g(-c, a)}$. L'attractivité de la demi-droite ($v = 0, t < 0$) nous donne alors que

$$\forall t \quad -c < t < 0 \implies v_a(t) \simeq 0$$

(et cette proximité est d'ordre ε).

Faisons un développement limité à l'ordre 1 de f : $f(t) = tf'(0)(1 + \alpha(t))$ avec $\alpha(t)$ infiniment petit pour t infiniment petit. Soit t_0 appréciable positif tel que si $|t| < t_0$ alors $|\alpha(t)| < \frac{1}{2}$. Soit $t_1 = \max(-t_0, -\frac{c}{2})$. Alors on a $v_a(-t_1)$ est d'ordre ε .

Nous allons maintenant regarder l'équation (6.3) à travers une loupe de puissance $\sqrt{\varepsilon}$. Pour ceci on pose

$$\begin{cases} t = \sqrt{\varepsilon}T \\ v = \sqrt{\varepsilon}V \end{cases}$$

Par cette loupe v_a devient V_a et est solution de

$$\frac{dV}{dT} = f'(0)T(1 + \alpha(\sqrt{\varepsilon}T))V + g(0)(1 + \beta(\sqrt{\varepsilon}T))V^2 + 1$$

si on pose $g(t, a) = g(0, a)(1 + \beta(t))$.

Soit $T_1 = \frac{t_1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Comme $v_a(-t_1)$ est d'ordre ε on a $V_a(-T_1) \simeq 0$. Comme de plus pour tout $T \in [-T_1, 0]$ on a $|\alpha(\sqrt{\varepsilon}T)| < \frac{1}{2}$ on en déduit que quel que soit T infiniment grand négatif supérieur à T_1 , $V_a(T)$ est infiniment petit. Et donc ${}^\circ V_a$ admet la droite $V = 0$ comme asymptote en $-\infty$.

L'ombre ${}^\circ V_a$ de V_a vérifie d'après le lemme de l'ombre courte l'équation

$$\frac{dV}{dT} = f'(0)TV + {}^\circ g(0, a)V^2 + 1$$

Et comme lors du théorème précédent on en déduit que ${}^\circ V_a$ doit admettre $V = -\frac{T}{\circ \left(\frac{g(0, a)}{f'(0)} \right)}$ comme asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$. Donc ici en $+\infty$. De plus les résultats du chapitre 4 montrent que

· Si $a << a_0$ on a $\circ \left(\frac{g(0, a)}{f'(0)} \right) < n$ (on a supposé $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0) >> 0$) ${}^\circ V_a$ a $(n-1)$ poles.

· Si $a >> a_0$ on a $\circ \left(\frac{g(0, a)}{f'(0)} \right) > n$ et ${}^\circ V_a$ a n poles.

Donc si a n'est pas infiniment proche de a_0 on a toujours pour $t >> 0$ $v_a(t) \simeq -\frac{f(t)}{g(t, a)}$, mais selon le signe de $a - a_0$ pas le même nombre de pôles.

Faisons maintenant le changement d'inconnue $v = \tan \Phi$ où Φ est considéré comme un angle cumulé. On obtient l'équation

$$\varepsilon \Phi' = -f(t) \sin \Phi \cos \Phi + g(t, a) \sin^2 \Phi + \varepsilon \cos^2 \Phi$$

Soit Φ_a la solution telle que $v_a = \tan \Phi_a$ et $\Phi_a(-c) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Les résultats précédents nous montrent que

· Si $a \ll a_0$ alors $\Phi_a(d) \simeq (n-1)\pi + \arctg\left(-\frac{f(d)}{g(d,a)}\right)$

· Si $a \gg a_0$ alors $\Phi_a(d) \simeq n\pi + \arctg\left(-\frac{f(d)}{g(d,a)}\right)$

Or $-\frac{f(d)}{g(d,a)}$ est strictement négatif. Donc $\arctg\left(-\frac{f(d)}{g(d,a)}\right)$ se trouve dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Comme Φ_a est une fonction continue par rapport à a on en déduit qu'il existe un a_1 infiniment proche de a_0 telle que $\Phi_{a_1}(d) \simeq (n-1)\pi$. Ce qui donne $v_{a_1}(d) \simeq 0$.

La répulsivité de la demi-droite ($v = 0, t > 0$) nous donne alors que $v_{a_1}(t)$ est infiniment petit pour tout t appréciable positif inférieur à d . Donc pour la valeur de paramètre a_1 l'équation (6.3) admet un canard de taille $(-c, d)$. ■

Corollaire 6.1.3 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, il existe une valeur de a infiniment proche de a_0 telle que l'équation (6.3) admet un grand canard, c'est à dire un canard de taille $(-c, d)$ avec c et d infiniment grands.*

Preuve. Le théorème montre que le halo des couples (c, d) tels qu'il existe $a \simeq a_0$ et (6.3) admet un canard de taille $(-c, d)$ contient la galaxie des couples (c, d) des réels positifs limités. D'après le principe de Fehrelle il contient également des couples infiniment grands. ■

Théorème 6.1.4 *Soit a_0 tel que (6.3) possède un grand canard. On suppose de plus que $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ n'est pas infiniment petit. Alors*

1. Pour $a = a_0$ l'équation (6.3) définit un feuilletage à canards dont la taille est donnée par une involution Φ : si un canard est de taille $(-c, d)$ alors on a $d = \Phi(-c)$. L'involution Φ est définie par $\int_t^{\Phi(t)} \circ f(\tau) d\tau = 0$
2. Si $|a - a_0|^\varepsilon$ est inférieur à 1 et non infiniment proche de 1, alors (6.3) définit un feuilletage mixte: si c_i et c_s sont définis par

$$\int_{c_i}^0 \circ f(\tau) d\tau = \int_0^{c_s} \circ f(\tau) d\tau = -^\circ(\varepsilon \ln |a - a_0|)$$

alors

- (a) Une solution qui entre dans le halo de $(v = 0)$ entre c_i et 0 est un canard dont la taille est donnée par l'involution Φ précédemment définie.
 - (b) Une solution qui entre dans le halo de $(v = 0)$ avant c_i sort du halo de $(v = 0)$ en c_s .
 - (c) Une solution qui sort du halo de $(v = 0)$ après c_s est entré dans le halo de $(v = 0)$ en c_i .
3. Si a est infiniment proche de a_0 et $|a - a_0|^\varepsilon$ est infiniment proche de 1, alors (6.3) ne possède pas de solution canard.

Preuve. Pour cette démonstration on supposera que $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ est appréciable positive. De plus on ne considérera que des valeurs de a assez proches de a_0 pour ne pas s'approcher d'une autre valeur entière de $^\circ\left(\frac{-f(t)}{g(t,a)}\right)$.

CHAPITRE 6 : L'EQUATION $\varepsilon u'' + f(t, \varepsilon)u' + g(t, a)u = 0$

Soit v_0 un grand canard de l'équation (6.3) pour $a = a_0$.

Nous considérons v une solution de (6.3) pour un certain paramètre a . Soit $w = v - v_0$.

La fonction w vérifie

$$\varepsilon w' = f(t)w + g(t, a)(2v_0(t) + w)w + v_0(t)^2(g(t, a) - g(t, a_0))$$

Posons alors $W = w^{[\varepsilon]}$. La fonction W est solution de

$$W' = W \left[f(t) + g(t, a) \left(2v_0(t) + W^{[1/\varepsilon]} \right) + v_0(t)^2 \frac{g(t, a) - g(t, a_0)}{W^{[1/\varepsilon]}} \right]$$

Comme v_0 est un grand canard on a pour t limité extérieur à la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0

$$v_0(t) \simeq 0$$

Si w est infiniment petit et t est limité nous obtenons

$$W' = W \left[f(t) + v_0^2(t) \frac{g(t, a) - g(t, a_0)}{W^{[1/\varepsilon]}} + \beta(t) \right]$$

avec $\beta(t)$ infiniment petit.

Les hypothèses sur la fonction g assurent l'existence d'une fonction $\tilde{g}$ S-continue telle que

$$g(t, a) - g(t, a_0) = (a - a_0)\tilde{g}(t, a, a_0) \text{ et } \tilde{g}(t, a_0, a_0) = \frac{\partial g}{\partial a}(t, a_0)$$

Comme par hypothèse $\frac{\partial g}{\partial a}(0, a_0)$ n'est pas infiniment petit, on en déduit qu'il existe un voisinage standard de $(0, a_0, a_0)$ dans lequel $\tilde{g}$ ne devient pas infiniment petite. De plus pour t non infiniment petit, $v_0(t)$ est d'ordre ε . On a donc également

$$v_0(t)^{[\varepsilon]} \simeq 1$$

Ce qui nous donne dans ce voisinage

$$\left[v_0(t)^2 (g(t, a) - g(t, a_0)) \right]^{[\varepsilon]} \simeq (a - a_0)^{[\varepsilon]}$$

En dehors de ce voisinage, comme $\tilde{g}$ ne peut devenir infiniment grande on sait simplement que $\left[v_0(t)^2 (g(t, a) - g(t, a_0)) \right]^{[\varepsilon]}$ ne peut devenir appréciablement supérieur à $(a - a_0)^{[\varepsilon]}$.

Donc si $|W|$ est appréciablement supérieur à $|a - a_0|^\varepsilon$ on a $v_0^2(t) \frac{g(t, a) - g(t, a_0)}{W^{[1/\varepsilon]}}$ infiniment petit et

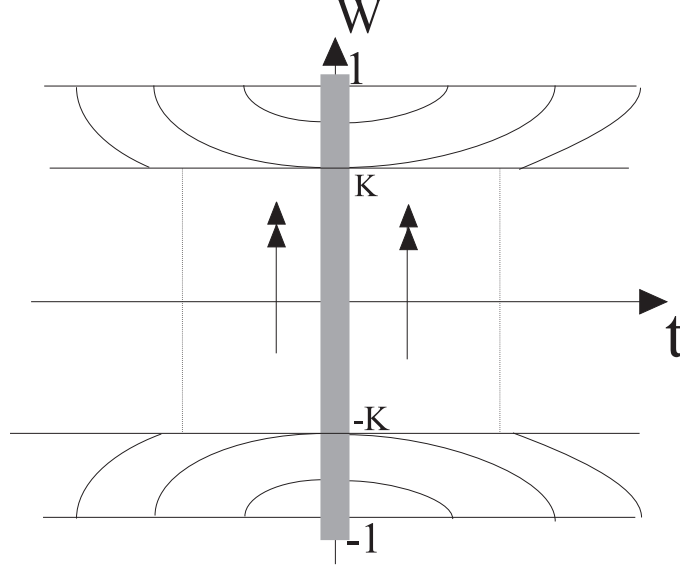
$$W' \simeq f(t)W$$

Ce qui s'intègre pour donner

$$W(t) \simeq K \exp \int f$$

Par contre si $|W|$ est appréciablement inférieur à $|a - a_0|^\varepsilon$ on a $v_0^2(t) \frac{g(t, a) - g(t, a_0)}{W^{[1/\varepsilon]}}$ infiniment grand dans un voisinage standard de l'origine, du signe de $(a - a_0)$.

Dans ce voisinage le champ est presque vertical.



Comme dans le cas le plus simple déjà étudié, le problème de la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 se résout en considérant l'équation sur le cylindre. En posant $u = \tan \Phi$ dans (6.1) on obtient

$$\varepsilon \Phi' = f(t) \sin \Phi \cos \Phi + g(t, a) \sin^2 \Phi + \varepsilon \cos^2 \Phi$$

Puis en posant $\Gamma = [\sin(\Phi - \Phi_0)]^{[\varepsilon]}$ où Φ_0 est la solution correspondant au grand canard v_0 on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma' = \Gamma \cos(\Phi - \Phi_0) [f(t) \cos(\Phi + \Phi_0) + (g(t, a) - \varepsilon) \sin(\Phi + \Phi_0) \\ + \tilde{g}(t, a, a_0) \frac{(a - a_0) \sin^2 \Phi_0}{\Gamma^{[1/\varepsilon]}}] \end{aligned}$$

qui s'étudie exactement comme le cas simple.

Les valeurs c_i et c_s sont les valeurs de t en lesquelles la solution de l'équation $W' = f(t)W$ telle que $W(0) = |a - a_0|^\varepsilon$ vaut 1.

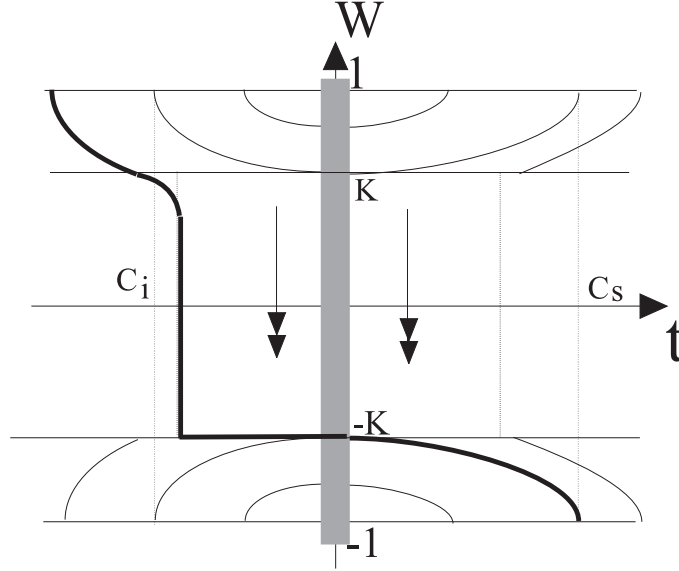
Ceci nous permet de donner le comportement des solutions, par exemple pour une solution entrant dans le halo de $v = 0$ par le haut:

Si la solution qui pénètre dans le halo de $v = 0$ (et donc dans la bande $|W| < 1$ après c_i), elle va longer une solution de $W' = f(t)W$ sans jamais rencontrer la bande $|W| < |a - a_0|^\varepsilon$. Si on appelle t^- la valeur de t en laquelle la solution entre dans le halo de $v = 0$ et t^+ celle en laquelle elle en ressort on a $W(t^-) = 1 = K \exp \int_{t^-}^0 f(\tau) d\tau$ et $W(t^+) = 1 = K \exp \int_0^{t^+} f(\tau) d\tau$, ce qui donne

$$\int_{t^-}^{t^+} f(\tau) d\tau = 0$$

Ceci nous donne l'involution Φ . Comme dans le cas où $a = a_0$ les valeurs de c_i et c_s sont infinies, toutes les trajectoires sont de ce type.

Si la solution pénètre dans le halo avant c_i , elle longe une solution de $W' = f(t)W$ jusqu'à rencontrer la bande $|W| \ll |a - a_0|^\varepsilon$. Une fois dans cette bande son mouvement se fait vers le bas si $a - a_0$ est négatif et infiniment vite dans un voisinage standard de l'origine, puis elle longe la solution de $W' = f(t)W$ valant $-|a - a_0|^\varepsilon$ en 0 pour ressortir en $t = c_s$ vers le bas.



Par contre si $a - a_0$ est positif, elle ne peut entrer dans la bande et ressort en $t = c_s$ vers le haut après avoir longé la solution de $W' = f(t)W$ valant $+|a - a_0|^\varepsilon$ en 0.

Une même analyse en remontant le temps donne le comportement des solutions sortant du halo de $v = 0$ après c_s .

■

6.2 Résonance

Lemme 6.2.1 *Soit v_0 solution de (6.3) telle que il existe t_0 appréciable négatif avec $v(t_0)$ non infiniment petit et non infiniment proche de $-\frac{f(t)}{g(t, a)}$. (C'est à dire que en t_0 la solution n'est pas infiniment proche de la variété lente). Alors pour tout t de $]t_0, 0[$ non infiniment proche de t_0 et de 0 on a $v_0(t) = -\frac{\varepsilon}{f(t)} + \varepsilon^2 l(t)$ avec l une fonction limitée.*

Preuve. En t_0 v_0 n'est pas infiniment proche de la variété lente. La solution va alors se précipiter vers la partie attractive de cette dernière, donc, comme t_0 est négatif, vers l'axe des abscisses. De plus, tant que v_0 n'est pas dans la ε -galaxie de 0 on a v'_0 infiniment grand. On en déduit que pour tout t appréciablement supérieur à t_0 , $v_0(t)$ est dans la ε -galaxie de 0.

Pour voir ce qui se passe dans cette galaxie, nous allons faire une loupe autour de l'axe ($v = 0$). Pour ceci nous allons faire le changement de variable $V = \frac{v}{\varepsilon}$.

L'équation devient alors

$$\varepsilon V' = f(t)V + \varepsilon g(t, a)V^2 + 1$$

C'est encore un champ lent-rapide dont la variété lente est $V = -\frac{1}{f(t)}$. Celle-ci est attractive pour les t négatifs.

Soit $t_1 \gg t_0$, t_1 appréciable négatif. En t_1 , v_0 est dans la ε -galaxie de 0. On en déduit que à l'échelle V la solution V_0 correspondante se trouve dans le plan limité en t_1 et mettra donc un temps infiniment petit pour entrer dans la ε -galaxie de la variété lente. On en déduit qu'il existe t_2 infiniment proche de t_1 tel que pour tout t supérieur à t_2 et appréciablement négatif on a $V_0(t) = -\frac{1}{f(t)} + \varepsilon l(t)$ avec l une fonction limitée. Ceci étant vrai pour tout t_1 , on en déduit le résultat voulu pour la solution v_0 . ■

Proposition 6.2.2 *Soit a tel que (6.3) n'admette pas de canard. Soit u_0 solution de (6.1) vérifiant le problème aux limites $u_0(-c) = A$, $u_0(d) = B$ avec c et d appréciables positifs, A et B réels limités. Soit $v_0 = \frac{u_0}{u_0'}$.*

Si $|u_0(-c)|$ est appréciable, alors pour tout t appréciablement inférieur à $-c$, $v_0(t)$ est infiniment proche de $\frac{-f(t)}{g(t, a)}$.

Preuve. Supposons qu'il existe $t \ll -c$ avec $v_0(t)$ non infiniment proche de $\frac{-f(t)}{g(t, a)}$. Alors d'après le lemme précédent on a pour tout t de $[t_0, 0[$ non infiniment proche de 0 $v_0(t) = \frac{-\varepsilon}{f(t)} + \varepsilon^2 l(t)$ avec l une fonction limitée. De plus, comme il n'y a pas de canard, pour tout t appréciable positif on a $v_0(t) \simeq \frac{-f(t)}{g(t, a)}$. Cette dernière presque égalité nous permet d'intégrer v_0 pour les t appréciables positifs :

$$\forall t \gg 0 \quad u_0(t) \simeq B \exp \int_d^t -\frac{g(\tau, a)}{f(\tau)} d\tau$$

En particulier ceci nous montre que pour tous les t positifs appréciables limités $u_0(t)$ est limité.

Les hypothèses sur f nous montrent qu'il existe un t_1 appréciable positif tel que $\int_{-c}^{t_1} f(\tau) d\tau < 0$. D'après ce qui précède, $u_0(t_1)$ est limité.

Pour tout réel λ , λu_0 est solution de (6.1). On en déduit que pour tout λ , $\lambda u_0 \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f(\tau) d\tau$ est solution de

$$\varepsilon u'' - f(t)u' + (g(t, a) - f'(t))u = 0 \quad (6.7)$$

Qui est une équation du type Ackenberg et O'Malley.

Soit $\lambda_0 = \exp \frac{-1}{\varepsilon} \int_0^{-c} f(\tau) d\tau$ et $u_1(t) = \lambda_0 u_0(t) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f(\tau) d\tau$. Par construction u_1 est solution de (6.7). De plus

$$u_1(-c) = u_0(-c) = A$$

et

$$u_1(t_1) = A \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{-c}^0 f(\tau) d\tau \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau = A \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{-c}^{t_1} f(\tau) d\tau$$

qui est limité par définition de t_1 . La fonction u_1 est donc une solution de (6.7) qui vérifie un problème aux limites. Comme l'hypothèse sur a implique

que nous sommes dans un cas non résonnant, nous en déduisons que u_1 est infiniment petite pour tout t de $] -c, t_1[$ non infiniment proche de $-c$ et de t .

Par intégration de $v_0 = \frac{u_0}{u'_0}$ on a $u_0(t) = u_0(-c) \exp \int_{-c}^t \frac{1}{v_0(\tau)} d\tau$. Ce qui donne $u_1(t) = A \left(\exp \frac{-1}{\varepsilon} \int_0^{-c} f(\tau) d\tau \right) \left(\exp \int_{-c}^t \frac{1}{v_0(\tau)} d\tau \right) \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f(\tau) d\tau \right)$. D'où

$$u_1(t) = A \exp \left(\int_{-c}^t \left(\frac{1}{v_0(\tau)} + \frac{f(\tau)}{\varepsilon} \right) d\tau \right)$$

Or si t se trouve dans l'intervalle $[-c, 0[$ et n'est pas infiniment proche de 0 on a

$$\begin{aligned} \forall \tau \in [-c, t] \quad \frac{1}{v_0(\tau)} + \frac{f(\tau)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon^2 l(\tau) - \frac{\varepsilon}{f(\tau)}} + \frac{f(\tau)}{\varepsilon} \\ &= \frac{f^2(\tau) l(\tau)}{\varepsilon f(\tau) l(\tau) - 1} \\ &\simeq -f^2(\tau) l(\tau) \end{aligned}$$

Donc pour tout t de $[-c, 0[$ non infiniment proche de 0 on a

$$u_1(t) \simeq A \exp \int_{-c}^t -f^2(\tau) l(\tau) d\tau$$

qui n'est pas infiniment petit si A ne l'est pas, ce qui contredit que u_1 est infiniment petite pour tout t de $] -c, t_1[$ non infiniment proche de $-c$ et de t . ■

Théorème 6.2.3 Soit a tel que (6.3) n'admette pas de canards. Soit u_0 solution de (6.1) vérifiant le problème aux limites $u_0(-c) = A$, $u_0(d) = B$ avec c et d appréciables positifs, A et B réels appréciables et limités.

Soit $u_L(t) = A \exp \int_{-c}^t \frac{-\circ g(\tau, a)}{\circ f(\tau)} d\tau$ la solution de l'équation réduite

$$\circ f(t)u' + \circ g(t, a)u = 0 \quad (6.8)$$

définie pour $t < 0$ et vérifiant le problème aux limites $u_L(-c) = A$.

Soit $u_R(t) = B \exp \int_d^t \frac{-\circ g(\tau, a)}{\circ f(\tau)} d\tau$ la solution de l'équation réduite (6.8) définie pour $t > 0$ et vérifiant le problème aux limites $u_R(d) = B$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0(t) &= u_L(t) \text{ si } t < 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0(t) &= u_R(t) \text{ si } t > 0 \end{aligned}$$

De plus, si $t \mapsto g(t, a)$ est négative, alors ces deux limites sont également vraies pour $t = 0$ et la limite est uniforme.

Preuve. Pour prouver ce théorème il nous suffit de montrer que la fonction $v_0 = \frac{u_0}{u'_0}$ ne longe pas la droite $v = 0$ en des valeurs appréciables de t . Nous allons ici nous contenter de le faire pour les valeurs négatives, le résultat pour les t positifs s'obtenant de la même manière.

Nous allons faire cette démonstration par l'absurde en supposant qu'il existe un $t_0 < 0$ tel que $v_0(t_0)$ ne soit pas infiniment proche de la variété lente.

Si t_0 est appréciablement inférieur à $-c$ nous sommes en évidente contradiction avec la proposition précédente. Ce cas ne peut donc pas avoir lieu et on a nécessairement $t_0 > -c$ ou $t_0 \simeq -c$.

CHAPITRE 6 : L'EQUATION $\varepsilon u'' + f(t, \varepsilon)u' + g(t, a)u = 0$

Pour poursuivre cette démonstration nous allons nous placer dans l'espace des phases pour l'équation (6.1) et la considérer en coordonnées polaires en posant

$$\begin{cases} u_0 = \rho \sin \theta \\ u'_0 = \rho \cos \theta \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho' &= \varepsilon u'_0 \sin \theta + \varepsilon u_0 \theta' \cos \theta + \varepsilon u''_0 \cos \theta - \varepsilon u'_0 \theta' \sin \theta \\ &= \varepsilon u'_0 \sin \theta - f(t)u_0 \cos \theta - g(t, a) \cos \theta + \varepsilon \theta' (u_0 \cos \theta - u'_0 \sin \theta) \end{aligned}$$

Comme $u_0 \cos \theta - u'_0 \sin \theta = 0$ on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho' &= \rho \cos \theta \sin \theta - f(t) \rho \cos^2 \theta - g(t, a) \rho \sin \theta \cos \theta \\ &= \cos^2 \theta \left(\varepsilon \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - f(t) - g(t, a) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \end{aligned}$$

En remarquant alors que $v_0 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ et $1 + v_0^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ on obtient

$$\varepsilon \rho' = h(t) \rho$$

avec

$$h(t) = \frac{(\varepsilon - g(t, a)) v_0(t) - f(t)}{1 + v_0(t)^2}$$

La fonction h est limitée pour tout t limité. De plus pour $t \gg t_0$ et $t \ll 0$ on a $h(t) \simeq -f(t)$ et pour $t \ll t_0$ on a $h(t) \simeq 0$.

Soit $H(t) = \int_{-c}^t h(\tau) d\tau$ et $F(t) = \int_{-c}^t f(\tau) d\tau$. Pour t appréciable négatif appréciablement supérieur à t_0 on a $H(t) = \int_{-c}^{t_0} h(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$ et comme h est limitée,

$$H(t) \simeq 0 + \int_{t_0}^t -f(\tau) d\tau = F(t_0) - F(t)$$

Par intégration nous avons

$$\forall t \geq t_0, t \ll 0 \quad \rho(t) = \rho(-c) \exp \left(\frac{F(t_0) - F(t) + \alpha(t)}{\varepsilon} \right)$$

avec $\alpha(t)$ infiniment petit.

Comme $\rho(-c)$ est supérieur à $|u_0(-c)|$, $\rho(-c)$ est appréciable. Comme de plus $\forall t \geq t_0, t \ll 0$ $F(t_0) - F(t)$ est appréciable positif, on en déduit que

$$\forall t \geq t_0, t \ll 0 \quad \rho(t) \gg 0$$

Comme on sait de plus que pour ces t u_0 et u'_0 sont de même signe (car v_0 est positif) on en déduit que

$$\forall t \geq t_0, t \ll 0 \quad |u_0(t)| \gg 0$$

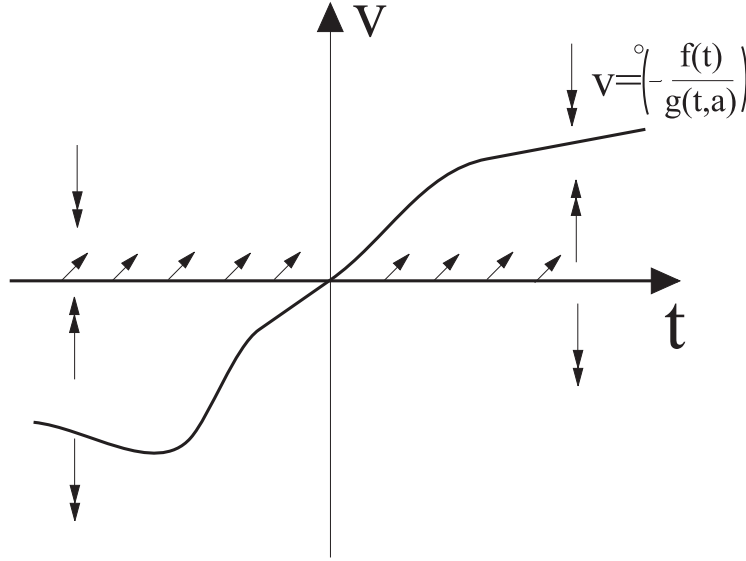
Soit $u_1(t) = \frac{u_0(t)}{u_0(\frac{t_0}{2})}$. On a $v_1 = \frac{u'_1}{u_1} = v_0$. Par définition de u_1 on a $u_1(\frac{t_0}{2}) = 1$.

De plus, comme $u_0(\frac{t_0}{2})$ est appréciable, on a $u_1(d) = \frac{u_0(d)}{u_0(\frac{t_0}{2})}$ est limité. La fonction u_1 vérifie donc les hypothèses de la proposition 6.2.2 et on a $\forall t \ll \frac{t_0}{2}$ $v_1(t) \simeq \frac{-f(t)}{g(t, a)}$, ce qui contredit l'hypothèse fait sur v_0 . On en conclut donc que $v_0(t) \simeq \frac{-f(t)}{g(t, a)}$ pour tout t appréciable négatif. D'où le résultat.

Il nous reste à considérer le cas où la fonction g est négative et t infiniment petit.

Tout d'abord, comme g reste appréciable les deux fonctions u_L et u_R ont pour limite 0 en 0, ainsi que leurs dérivées. Il nous faut donc montrer que $u_0(t)$ est infiniment petit pour t infiniment petit. Pour ceci nous allons considérer v_0 la solution de l'équation de Ricatti correspondant à u_0 .

Comme v_0 a au plus 1 pôle, le signe de v_0 change une fois et une seule, passant de négatif à positif.



Or

$$v_0 > 0 \iff \frac{u_0}{u_0'} > 0 \iff u_0 u_0' > 0$$

On a donc v_0 positif si et seulement si u^2 est croissante et de même v_0 négatif si et seulement si u^2 est décroissante. On en déduit que sur $[-c, d]$ la fonction u^2 est d'abord décroissante puis positive. Ce qui donne $u^2(t) \simeq 0$ pour $t \simeq 0$.

Donc on a bien $u(t) \simeq 0$ pour $t \simeq 0$. Ce qui montre l'uniformité de la limite.

■

Théorème 6.2.4 Soit a tel que (6.3) admette des canards de taille au moins $(-c, d)$. Soit u_0 solution de (6.1) vérifiant le problème aux limites $u_0(-c) = A$, $u_0(d) = B$ avec c et d appréciables positifs, A et B réels appréciables et limités. Alors en général,

- (i) Pour tout t appréciable négatif et appréciablement supérieur à $-c$, $u_0(t)$ est infiniment grand du signe de A .
- (ii) Pour tout t appréciable positif et appréciablement inférieur à d , $u_0(t)$ est infiniment grand du signe de B .

Preuve. Pour montrer ce théorème nous allons montrer que l'ombre de $v_0 = \frac{u_0}{u_0'}$ contient le segment $(v = 0, t \in]-c, d[)$. (En fait nous allons montrer qu'elle contient la partie du segment pour les t négatifs, la partie positive se montrant de même).

CHAPITRE 6 : L'EQUATION $\varepsilon u'' + f(t, \varepsilon)u' + g(t, a)u = 0$

Supposons qu'il existe t_0 appréciable négatif et appréciablement supérieur à $-c$ tel que $v_0(t_0)$ soit infiniment proche de $\frac{-f(t_0)}{g(t_0, a)}$. La répulsivité de cette partie de la variété lente nous montre alors que pour tout t inférieur à t_0 on a $v_0(t) \simeq \frac{-f(t)}{g(t, a)}$.

Par intégration on a

$$u_0(t) = u_0(-c) \exp \int_{-c}^t \frac{1}{v_0(\tau)} d\tau$$

Soit $t_1 = \frac{-c+t_0}{2}$. Comme $\frac{1}{v_0(t)}$ est limité sur $[-c, t_1]$ on en déduit que $u_0(t_1)$ est limité.

Soit $u_1(t) = u_0(t) \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{-c}^t f(\tau) d\tau$. La fonction u_1 est solution d'une équation de type Ackerberg et O'Malley avec une valeur de paramètre telle qu'il y ait résonance. Comme $u_1(-c) = u_0(-c)$ n'est pas infiniment petit, on en déduit que $u_1(t_1)$ n'est pas infiniment petit (sauf dans les cas exceptionnels).

Pourtant $\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{-c}^{t_1} f(\tau) d\tau$ est infiniment petit car $f(t)$ est négative pour les t négatifs et nous avons vu que $u_0(t_1)$ est limité, ce qui nous donne par définition de $u_1, u_1(t_1)$ infiniment petit. Il y a donc contradiction et t_0 n'existe pas.

On en déduit que pour tout t appréciable négatif et appréciablement supérieur à $-c$, $v_0(t)$ est infiniment petit.

De même on montre que pour tout t appréciable positif et appréciablement inférieur à d , $v_0(t)$ est infiniment petit.

Il nous reste alors à intégrer pour obtenir le résultat annoncé pour u_0 . (Le signe de v_0 lorsque v_0 est infiniment petit étant donné par le lemme 6.2.1.) ■

Annexe 1 :Notations et définitions

Soient a et b deux réels. On utilisera la notation $a \simeq b$ pour signifier que a est infiniment proche de b .

Etant donnés deux réels a et b on utilisera la notation $a \ll b$ pour signifier que a est inférieur à b et non infiniment proche de b : $a \ll b \Leftrightarrow (a < b \text{ et } a \not\simeq b)$.

De même on utilisera $a \gg b$ pour signifier que a est supérieur à b et non infiniment proche de b : $a \gg b \Leftrightarrow (a > b \text{ et } a \not\simeq b)$.

Soit f une fonction réelle et E un ensemble du plan. Soit t_0 un réel standard. On dira que f entre dans le halo de E en t_0 s'il existe 4 réels t_1 , t_2 , t_3 et t_4 avec t_2 et t_3 infiniment proches de t_0 , $t_1 \ll t_2$ et $t_3 \ll t_4$ tels que

$$\forall t \in]t_1, t_2[\quad d((t, f(t)), E) \not\simeq 0 \text{ et } \forall t \in]t_3, t_4[\quad d((t, f(t)), E) \simeq 0$$

où d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

De même on dira que f sort du halo en t_0 s'il existe 4 réels t_1 , t_2 , t_3 et t_4 avec t_2 et t_3 infiniment proches de t_0 , $t_1 \ll t_2$ et $t_3 \ll t_4$ tels que

$$\forall t \in]t_1, t_2[\quad d((t, f(t)), E) \simeq 0 \text{ et } \forall t \in]t_3, t_4[\quad d((t, f(t)), E) \not\simeq 0$$

On dira que f longe E sur $[a, b]$ si

$$\forall t \in]a, b[, a \ll t \ll b \quad d((t, f(t)), E) \simeq 0$$

Par abus de langage, si g est une fonction réelle on dira que f entre dans le(respectivement sort du) halo de g pour signifier que f entre dans le(respectivement sort du) le halo du graphe de g .

Annexe 2 : La fonction hypergéométrique confluente de Kummer

Le but ici n'est pas de donner une liste exhaustive des propriétés de la fonction de Kummer (qui pourra être trouvée dans [1] mais simplement d'en donner une définition et les quelques propriétés utilisées dans la première partie.

La fonction hypergéométrique confluente de Kummer $M(a, b, z)$ (parfois également notée Φ , ou en utilisant la notation des fonction hypergéométriques généralisées : ${}_1F_1$.) est définie comme étant la solution de l'équation

$$zy'' + (b - z)y' - ay = 0$$

vérifiant

$$M(a, b, 0) = 1$$

et

$$\frac{d}{dz}M(a, b, z)|_{z=0} = \frac{a}{b}$$

Elle est définie et dérivable pour tout z complexe pourvu que b ne soit pas un entier négatif, de plus sa dérivée vaut

$$\frac{d}{dz}M(a, b, z) = \frac{a}{b}M(a + 1, b + 1, z)$$

Son développement en série entière en 0 est

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} \quad (9)$$

avec la notation

$$(a)_n = a(a + 1) \cdots (a + n - 1)$$

et la convention $(a)_0 = 1$. Ce développement est convergent si b n'est pas un entier négatif. De plus lorsque a est un entier négatif, ce développement est un polynôme de degré $-a$.

Si a n'est pas un entier négatif et $n \in \mathbb{N}$ alors $M(a, b, z)$ présente un pôle simple en $b = -n$. Ceci est encore vrai si a est un entier négatif inférieur à b .

Le développement asymptotique de la fonction de Kummer dépend du signe de la partie réelle de z :

ANNEXE 2 : LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE CONFLUENTE DE KUMMER

Si $\operatorname{Re}(z) > 0$ et $a \notin -\mathbb{N}$, alors

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} (1 + O(\frac{1}{|z|})) \quad (10)$$

avec Γ la fonction d'Euler.

Si $\operatorname{Re} z < 0$ et $(b - a) \notin -\mathbb{N}$, alors

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} (1 + O(\frac{1}{|z|})) \quad (11)$$

La fonction M vérifie de plus la propriété suivante appelée transformation de Kummer :

$$M(a, b, z) = e^z M(b-a, b, -z) \quad (12)$$

Cette transformation nous montre ce qui se passe lorsque $\operatorname{Re} z < 0$ et $(b - a) \in -\mathbb{N}$. En effet, d'après cette transformation $M(a, b, z)$ est alors égale à e^z multipliée par un polynôme.

Annexe 3 : Tracés numériques de solutions

Dans cette annexe nous trouverons divers tracés des solutions des équations $\varepsilon u'' \pm 2tu' + ku = 0$ vérifiant des problèmes aux limites qui illustreront les différents phénomènes décrits dans la première partie.

L'équation $\varepsilon u'' - 2tu' + ku = 0$

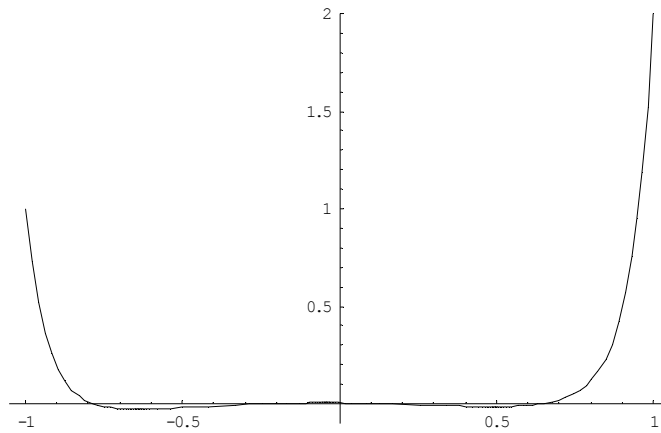
Tout d'abord quelques solutions dans le cas non résonnant qui nous permettront notamment d'observer les petites oscillations qui se produisent près de $t = 0$ et qui illustrent les pôles de l'équation de Riccati

Toutes ces solutions vérifient un problème aux limites de la forme

$$u(-1, \varepsilon) = a, u(1, \varepsilon) = b$$

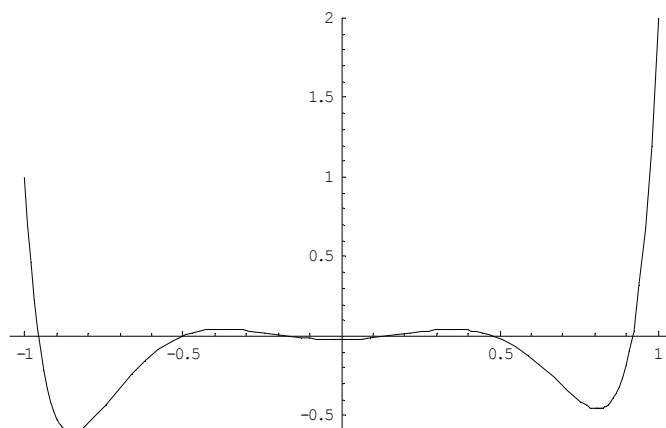
Les tracés sont faits avec des valeurs assez importantes de ε . Ceci permet d'observer les oscillations qui ont lieu près de 0 et qui sont les manifestations des pôles des équations de Riccati dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0. Le fait que ε soit relativement important fait que cette $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 occupe presque tout l'intervalle d'étude. Ceci explique que certaines des courbes présentent des oscillations encore très près des bords.

Tout d'abord un tracé avec $a = 1$, $b = 2$, $k = 5$ et $\varepsilon = 0.1$:



ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

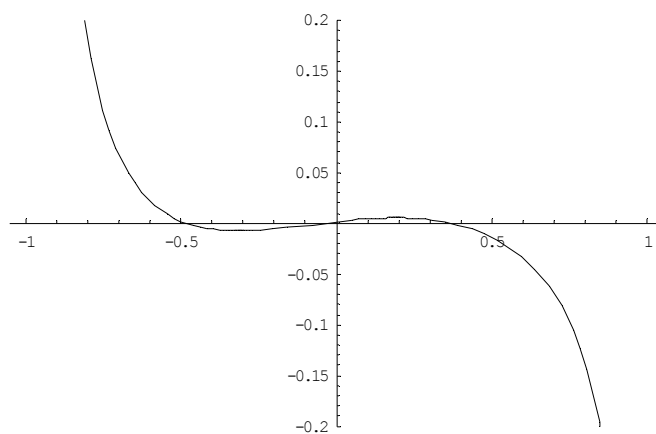
$a = 1, b = 2, k = 9, \varepsilon = 0.1$:



Dans ce dernier cas on observe encore des oscillations près des bords (vers ± 0.8), mais celles-ci sont à une distance de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$ de 0. Un tracé dans le plan (t, v) de la solutions correspondante sur un intervalle plus large montre bien le confinement des pôles près de 0.

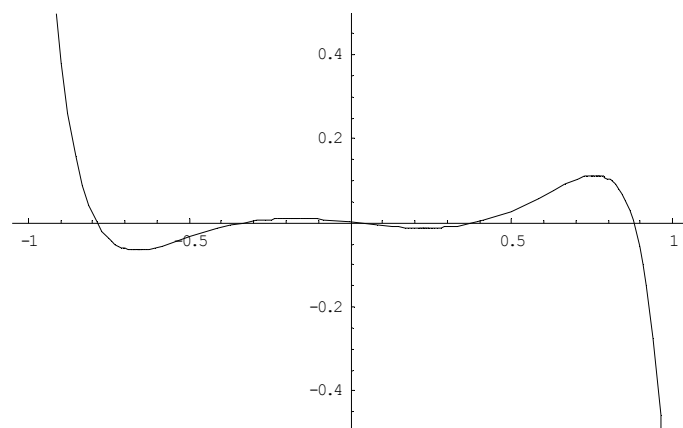
Il en est de même pour les tracés suivants:

$a = 2, b = -1, k = 5$ et $\varepsilon = 0.1$:

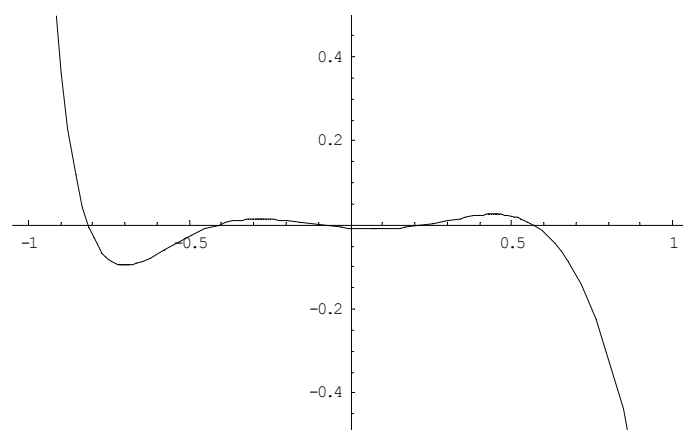


ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

$a = 2, b = -1, k = 7$ et $\varepsilon = 0.1$:



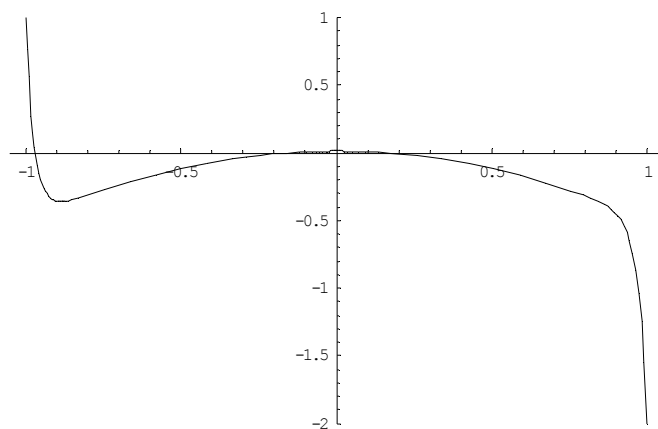
$a = 2, b = -1, k = 9$ et $\varepsilon = 0.1$:



ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

Puis quelques cas résonnants :

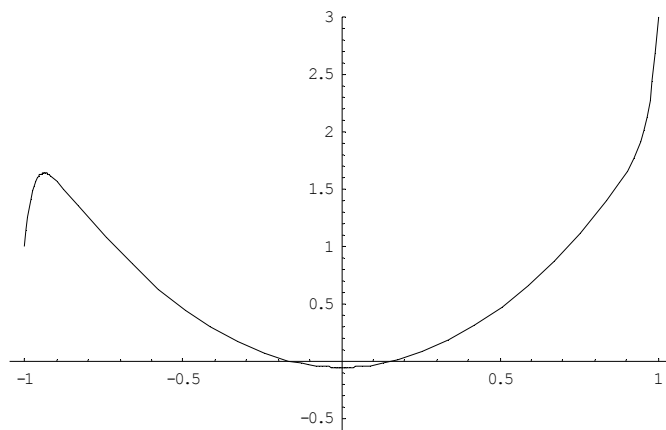
$a = 1$, $b = -2$, $k = 4$ et $\varepsilon = 0.05$:



On observe bien une limite proportionnelle à t^2 entourée de deux couches limites. Le tracé dans le plan (t, v) de la solution de l'équation de Riccati correspondante met en évidence le canard entre -1 et 1 .

Le tracé suivant montre la solution de la même équation avec des conditions aux limites différentes.

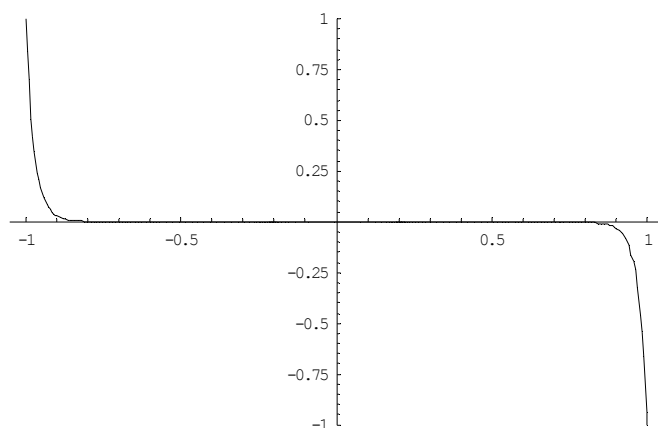
$a = 1$, $b = 3$, $k = 4$ et $\varepsilon = 0.05$:



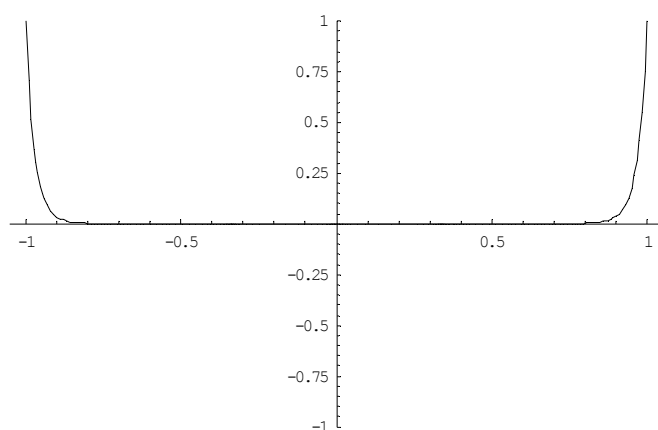
ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

Les deux prochains cas illustrent le fait que pour des valeurs de k entier naturel pair, la solution limite peut également être nulle.

$a = 1, b = -1, k = 4$ et $\varepsilon = 0.05$:



$a = 1, b = 1, k = 6$ et $\varepsilon = 0.05$:



L'équation $\varepsilon u'' + 2tu' + ku = 0$

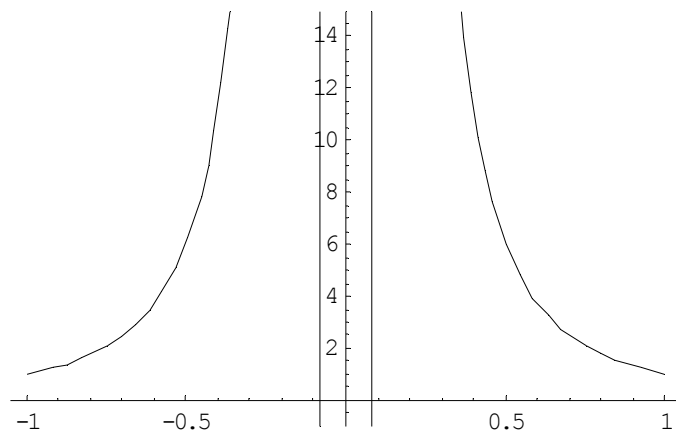
Nous considérons toujours les solutions de problèmes aux limites de la forme

$$u(-1, \varepsilon) = a, u(1, \varepsilon) = b$$

Tout d'abord quelques solutions avec k positif mais non entier naturel pair

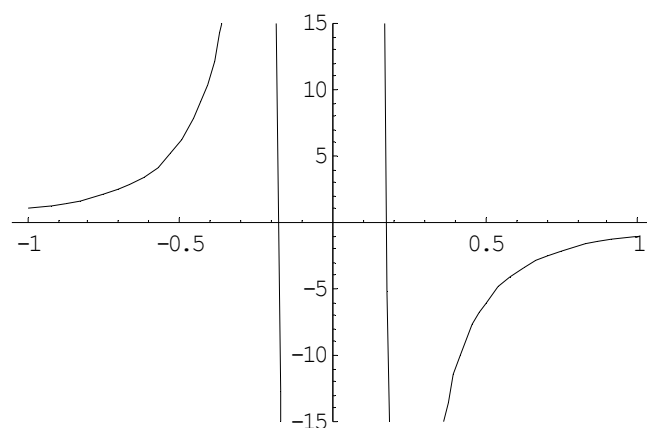
ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

$a = 1, b = 1, k = 5$ et $\varepsilon = 0.01$:



Ce tracé montre les deux solutions de l'équation réduite ainsi que la couche libre en 0. Le tracé suivant concerne la même équation mais pour des conditions aux limites différentes.

$a = 1, b = -1, k = 5$ et $\varepsilon = 0.01$:

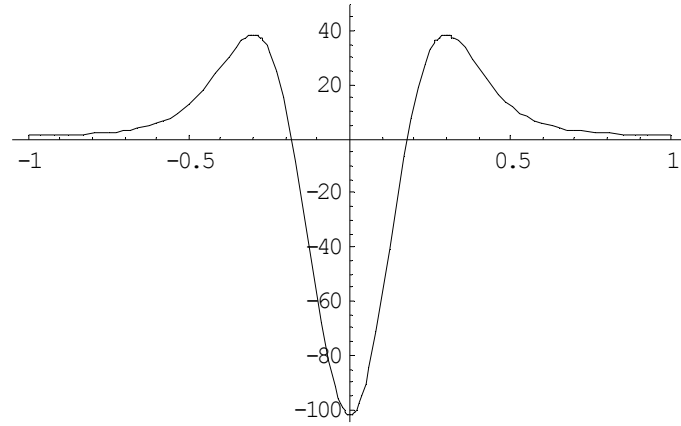


On voit très bien dans ces deux cas que les limites pour les t négatifs (respectivement positifs) ne dépendent que de la valeur en -1 (respectivement $+1$).

Pour les prochains tracés nous allons utiliser une valeur plus grande de ε afin de pouvoir observer les oscillations près de 0.

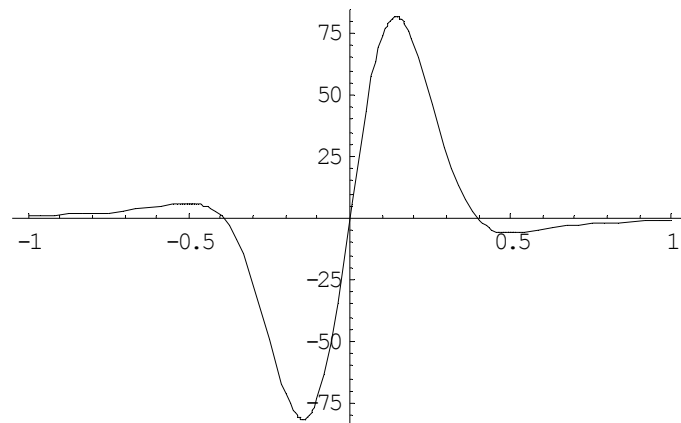
ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

$a = 1, b = 1, k = 5$ et $\varepsilon = 0.05$:



Ces oscillations peuvent être mises en parallèle avec les pôles de la solution correspondante de l'équation de Riccati

$a = 1, b = -1, k = 5$ et $\varepsilon = 0.05$:



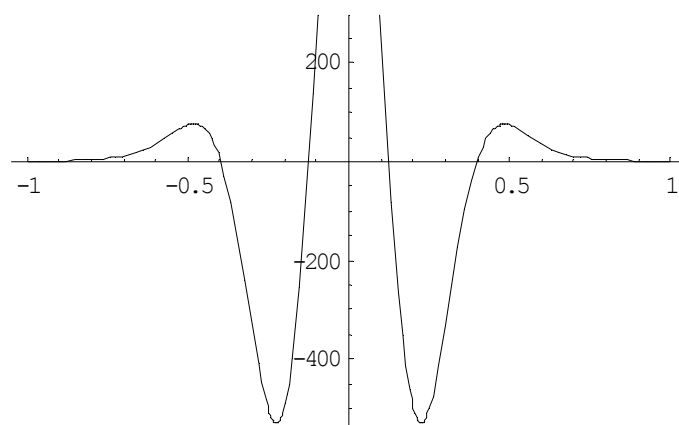
ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

et la solution correspondante de l'équation de Riccati

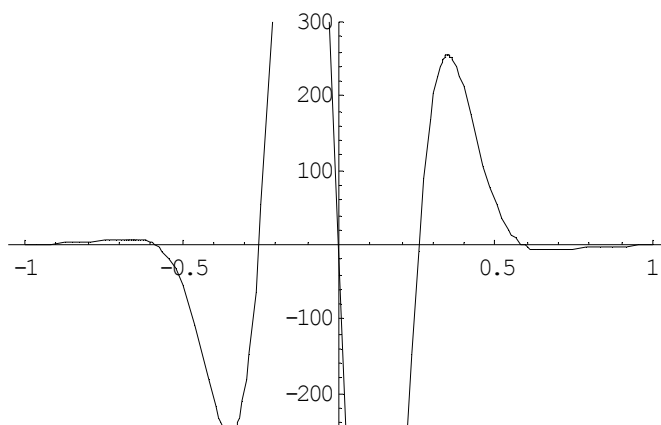
Ces deux tracés dans le plan (t, v) mettent en évidence 2 solution qui ne possèdent pas le même nombre de pôle. Ceci s'explique par le fait qu'elles longent toute la droite $v = -\frac{2t}{k}$ et ne contredit pas le théorème 4.2.9.

Et pour des valeurs plus grandes de k :

$a = 1, b = 1, k = 9$ et $\varepsilon = 0.05$:



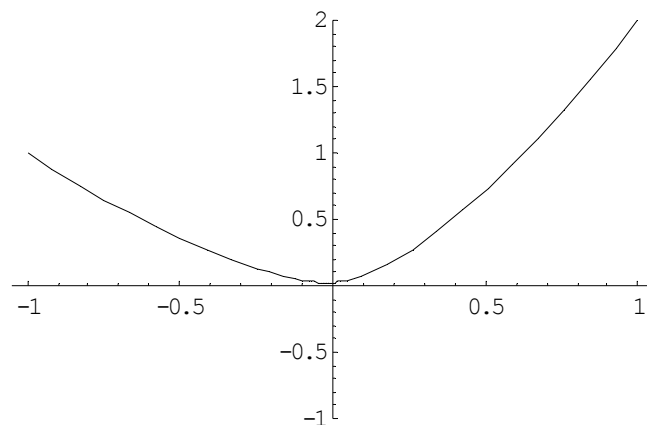
$a = 1, b = -1, k = 9$ et $\varepsilon = 0.05$:



ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

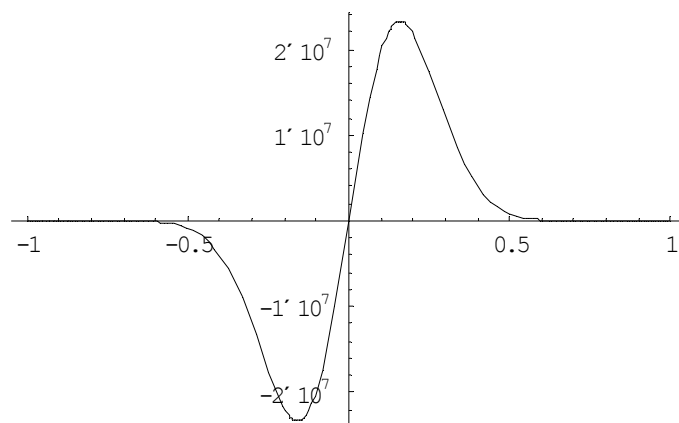
Le dernier cas non résonnant que nous allons considérer est le cas où k est négatif et où les deux solutions limites de l'équation réduite ont une limite nulle en 0. La convergence de la solution u est alors uniforme.

$a = 1$, $b = 2$, $k = -3$ et $\varepsilon = 0.01$:



Nous allons maintenant considérer quelques cas résonnants :

$a = 1$, $b = 2$, $k = 4$ et $\varepsilon = 0.05$:

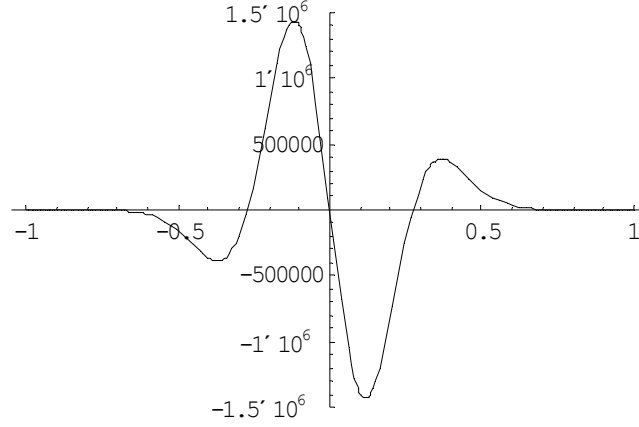


Afin de pouvoir observer toute la courbe, l'échelle choisie pour les u est très grande. Ceci permet d'observer comment la solution tend vers l'infini avec ε . La solution correspondante de l'équation de Riccati est un canard

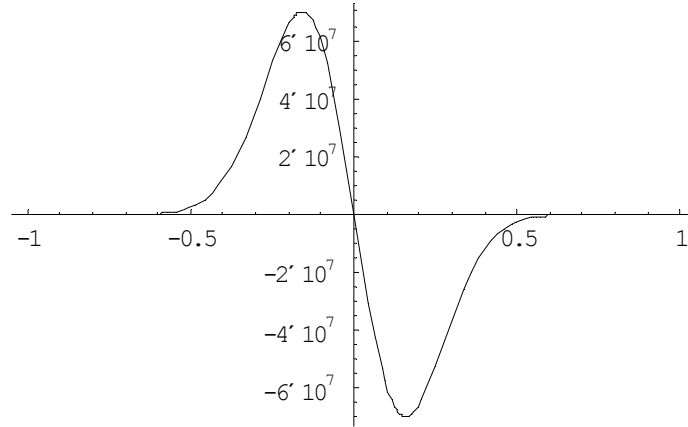
ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

On voit la trajectoire longer la droite ($v = 0$) entre -1 et 1 . Elle présente 2 pôles dans la $\sqrt{\varepsilon}$ -galaxie de 0 et un pôle près de -1 .

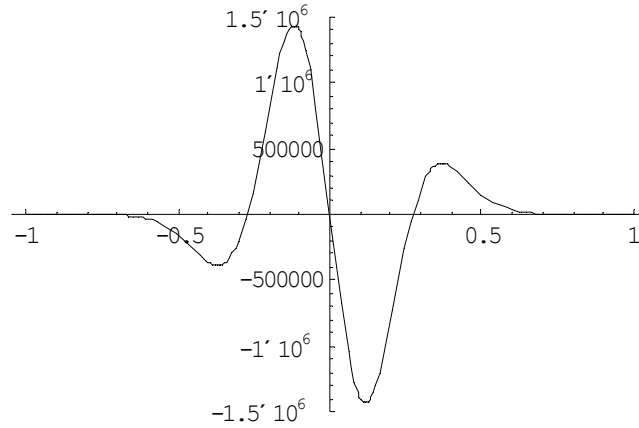
$a = 1, b = 2, k = 8$ et $\varepsilon = 0.05$:



$a = 1, b = -2, k = 4$ et $\varepsilon = 0.05$:



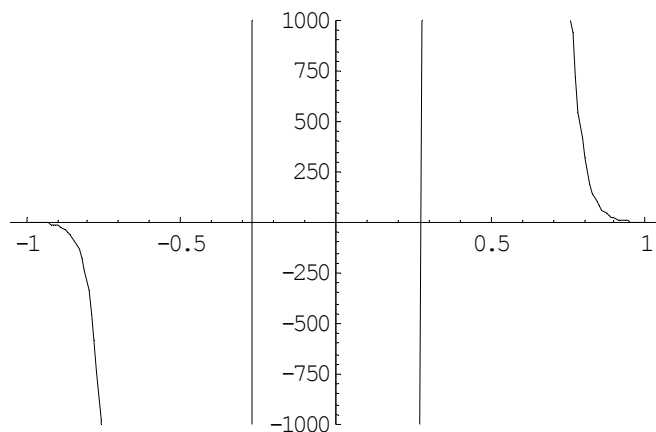
$a = 1, b = 2, k = 8$ et $\varepsilon = 0.05$:



ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

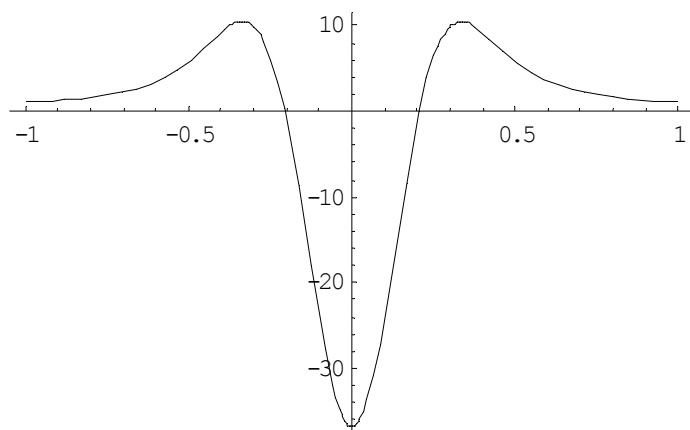
En faisant un agrandissement sur l'axe des u pour mieux voir les couches limites en -1 et en 1 :

$a = 1, b = 2, k = 8$ et $\varepsilon = 0.05$:

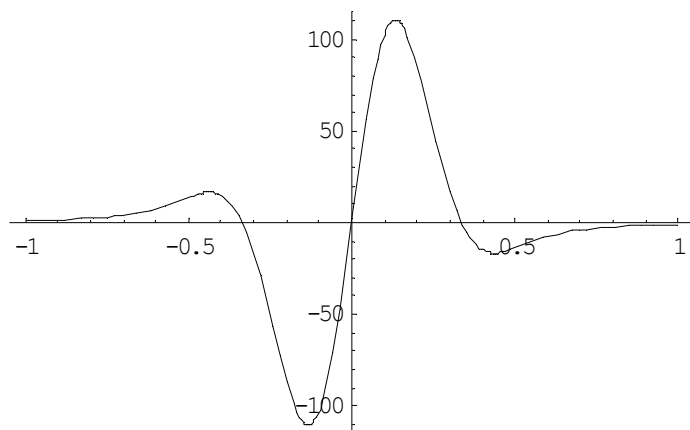


Enfin deux cas où la solution ne tend pas vers l'infini alors que le paramètre k est un entier naturel pair :

$a = 1, b = 1, k = 4$ et $\varepsilon = 0.05$:



$a = 1, b = -1, k = 6$ et $\varepsilon = 0.05$:



Bibliography

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover 0-486-61272-4 (1964).
- [2] R. C. ACKERBERG, R. E. O'MALLEY Jr., *Boundary Layer Problems exhibiting Resonance*, Studies Applied Math. 49 (1970), pp. 277-295.
- [3] E. BENOIT, J. L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, *Chasse au Canard*, IRMA, Strasbourg (1980).
- [4] E. BENOIT, *Canards et enlacements*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, no. 72 (1990), p. 63-91.
- [5] E. BENOIT, A. FRUCHARD, R. SCHAFKE, G. WALLET, *Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. VII, no 4 (1998), pp 1-32.
- [6] J. L. CALLOT, *Bifurcations du portrait de phase pour des équations différentielles linéaires du second ordre ayant pour type l'équation de Hermite*, Thèse, Strasbourg (1981).
- [7] J. L. CALLOT, *Champs lents-rapides complexes à une dimension lente*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 6 (1993), pp. 149-173.
- [8] J. L. CALLOT, *Sur la piste des canards imaginaires*, Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean Louis Callot, Strasbourg-Obernai, 12-16 Juin 1995, A. Fruchard et A. Troesch éditeurs, Publication IRMA, Strasbourg (1995), pp. 191-204.
- [9] L. P. COOK, W. ECKHAUS, *Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type*, Studies in Appl. Math., 52 (1973), pp. 129-139.
- [10] F. DIENER, M. DIENER, *Ducks and rivers : three existence results*, Non-standard Analysis in Practice, F. Diener and M. Diener editors, Universitexte, Springer-Verlag, Berlin (1995), pp. 205-224.
- [11] F. DIENER, G. REEB, *Analyse non standard*, Hermann Ed., Coll. Enseignement des sciences (1989)
- [12] A. FRUCHARD, R. SCHAFKE, *Surstabilité et résonance* (1999) <http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/>
- [13] K. S. KATO, *A short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin (1982).

ANNEXE 3 : TRACES NUMERIQUES DE SOLUTIONS

- [14] N. KOPELL, *A geometric approach to boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM. J. Appl. Math., 37 No 2 (1979), pp436-458.
- [15] W. D. LAKIN, *Boundary value problems with a turning point*, Studies in Appl. Math., 51 (1972), pp. 261-275.
- [16] C. H. LIN, *The sufficiency of Matkowsky-condition in the problem of resonance*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 No 2 (1983), pp. 647-670.
- [17] C. LOBRY, T. SARI, S. TOUHAMI, *On Tykhonov's Theorem for Convergence of Solutions of slow and fast Systems*, Electronic J. Diff. Equa., 1998, No. 19 (1998), pp.1-22.
- [18] R. LUTZ, M. GOZE, *Non standard analysis : a practical guide with applications*, Lectures Notes in Math. 881, Springer Verlag (1981).
- [19] B. J. MATKOWSKY, *On Boundary Layer Problems exhibiting Resonance*, SIAM Review 17 (1975), pp. 82-100.
- [20] R. E. O'MALLEY Jr., *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [21] A. N. TYKHONOV, *Systems of differential equations containing small parameters multiplying the derivatives*, Mat. Sborn.,31 (1952), pp. 575-586 (en russe).
- [22] W. WASOW, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Krieger, New York (1976).
- [23] W. WASOW, *Linear Turning Point Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1985).