

Exercices sur la convergence de séries numériques 3

Exercice 1 Déterminer la convergence des séries de terme général :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad b_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$c_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \qquad d_n = \frac{\sin n}{n^2 - n + 1}$$

$$e_n = \frac{(-1)^n}{n^3 + (-1)^n} \qquad f_n = \frac{\ln(n+2) \cos n}{n^2 + 1}$$

$$g_n = \frac{1}{n^2 + 1} ((-1)^n n + k), k \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 Séries de Bertrand

On s'intéresse ici à la convergence des séries dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ avec $\alpha > 0$.

1. Montrer que si $0 < \alpha < 1$ la série diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ la série converge.
3. Pour la suite on suppose $\alpha = 1$.

$$(a) \text{ Etudier la fonction } f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad .$$

$$x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$$

(b) En déduire qu'il existe un entier M tel que pour tout N supérieur à M on a

$$\sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n \ln^\beta n} \leq \int_M^N f(x) dx \leq \sum_{n=M}^{N-1} \frac{1}{n \ln^\beta n} M.$$

(c) En déduire la nature de la série (on pourra distinguer les cas $\beta < 1$, $\beta = 1$ et $\beta > 1$).